

〈 第 4 章 〉

4

2次元フーリエ変換

2次元フーリエ変換は積分変換であり、初等数学の観点からすると2次元フーリエ変換に身近な積分は次式の重積分である。

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy \quad (4-1)$$

2次元フーリエ変換は被積分関数に2次元平面波

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) e^{-i2\pi(ux+vy)} dx dy \quad (4-2)$$

を掛け算し、さらに積分領域が $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$ から x と y が無限大になったものとみなせる。

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i2\pi(ux+vy)} dx dy \quad (4-3)$$

(4-1) 式の2重積分は $f(x, y)$ と面積素分 $dx dy$ との積、すなわち直方体の総和からなる体積を計算するので結果は定数である。(4-2) 式は $f(x, y)$ に複素指数関数を掛け算してできる関数の体積を計算する。(4-1) 式と異なることは複素指数関数が2つの変数 u と v をもつので、体積が (u, v) に依存することである。そして x と y の積分範囲を $-\infty \leq x \leq \infty$, $-\infty \leq y \leq \infty$ のように拡張すると、(4-3) 式の2次元フーリエ変換となる。複素指数関数は

$$e^{-i2\pi(ux+vy)} = \cos[2\pi(ux+vy)] - i \sin[2\pi(ux+vy)] \quad (4-4)$$

2次元余弦波と2次元正弦波に分解できるので、 $f(x, y)$ にこれら2次元平面波を掛け算してできる関数の体積がそれぞれ2次元フーリエ変換の実部、虚部となる。類似性の尺度としての内積が関数についても定義されることから、 $f(x, y)$ と2次元平面波との積の重積分は両者の類似性を表す。2次元フーリエ変換を直感的に捉えるには、重積分に結び付けてイメージ化するのが役立つ。

〔第1節〕 2次元フーリエ変換

2次元関数 $f(x, y)$ の2次元フーリエ変換と逆変換は次式のように表すことにする。

$$F(u, v) = \mathcal{F}\{f(x, y)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i2\pi(ux+vy)} dx dy \quad (4-5)$$

$$f(x, y) = \mathcal{F}^{-1}\{F(u, v)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{i2\pi(ux+vy)} du dv \quad (4-6)$$

ここで \mathcal{F} はフーリエ変換、 \mathcal{F}^{-1} はフーリエ逆変換を表す。図4-1は2次元平面波を示す。座標は x と y で範囲を $[-64, 64]$ としている。 u と v を1つ決めると1つの2次元余弦波、2次元正弦波ができる。(a) は x 軸方向のみに変化し y 軸方向には変化しない $u = 1$, $v = 0$ とした2次元余弦波で x 軸の128の中

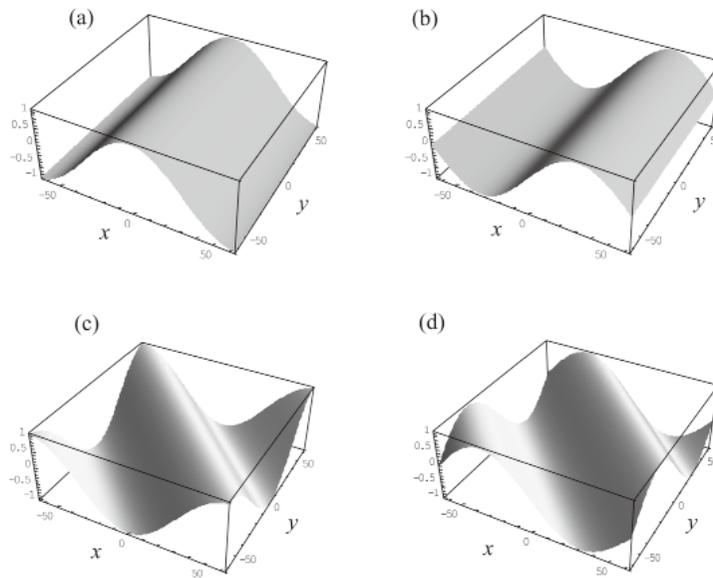


図 4-1 2次元平面波

に1つの余弦波が含まれ周波数は $1/128$ である。(b)は x 軸方向のみに変化し y 軸方向には変化しない $u=1, v=0$ とした2次元正弦波で x 軸の128の中に1つの正弦波が含まれ周波数は $1/128$ である。(c)は $u=1, v=1$ の2次元余弦波、(d)は $u=1, v=1$ の2次元正弦波を示す。2次元関数(2次元データ)に2次元余弦波を掛け積分した類似度が2次元フーリエ変換の実部、2次元正弦波を掛け積分した類似度が虚部である。 x と y の画素が256の 256×256 画素の画像では、 u と v も同じく256あり、2次元余弦波と2次元正弦波はそれぞれ 256×256 ある。これら2次元平面波が進む方向(進行方向)は図4-2のように x 軸とのなす角で表される。斜め方向の直線群は2次元平面波が同じ値をとることを示し進行方向の周期に相当する。 x 軸上から2次元平面波を眺めると周期は $1/u_0$ 、 y 軸上から2次元平面波を眺めると周期は $1/v_0$ となるので、2次元平面波はこれら周波数 u_0, v_0 で特徴づけられる。

$$\cos \frac{2\pi(u_0x + v_0y)}{N}, \quad \sin \frac{2\pi(u_0x + v_0y)}{N} \quad (4-7)$$

$$\tan \theta = \frac{1/u_0}{1/v_0} = \frac{v_0}{u_0}, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{v_0}{u_0} \quad (4-8)$$

例題 4.1 最も簡単な2次元フーリエ変換の例として矩形関数の2次元フーリエ変換を示す。

$$f(x, y) = \begin{cases} A & |x| < a, |y| < a \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4-9)$$

2次元フーリエ変換において、 x および y がそれぞれ $(-a, a)$ の範囲のとき $f(x, y) = A$ なので、定数 A を積分の外に出すと x と y の2重積分は、それぞれ x に関する指数関数の積分と y に関する指数関数の積分に分離できる(それぞれの積分の積になる)。

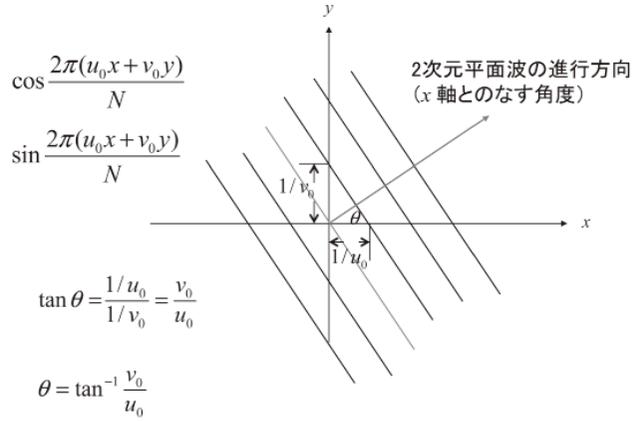


図 4-2 2次元平面波の周期と進行方向

$$\begin{aligned} F(u, v) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A e^{-i2\pi(ux+vy)} dx dy \\ &= A \int_{-a}^a e^{-i2\pi ux} \left\{ \int_{-a}^a e^{-i2\pi vy} dy \right\} dx = A \left[-\frac{e^{-i2\pi ux}}{i2\pi u} \right]_{-a}^a \left[-\frac{e^{-i2\pi vy}}{i2\pi v} \right]_{-a}^a \\ &= A \left\{ \left(\frac{-e^{-i2\pi ua} + e^{-i2\pi u(-a)}}{i2\pi u} \right) \left(\frac{-e^{-i2\pi va} + e^{-i2\pi v(-a)}}{i2\pi v} \right) \right\} \\ &= A \left\{ \left(\frac{e^{i2\pi ua} - e^{-i2\pi ua}}{i2\pi u} \right) \left(\frac{e^{i2\pi va} - e^{-i2\pi va}}{i2\pi v} \right) \right\} \end{aligned}$$

2行の指数関数の積分は以下の公式を利用した.

$$\int_{-a}^a e^{-bx} dx = \left[-\frac{e^{-bx}}{b} \right]_{-a}^a$$

ここで $b = i2\pi u$ と置くと

$$\int_{-a}^a e^{-i2\pi ux} dx = \left[-\frac{e^{-i2\pi ux}}{i2\pi u} \right]_{-a}^a$$

となる. オイラーの公式

$$e^{i2\pi ua} = \cos(2\pi ua) + i \sin(2\pi ua) \tag{4-10}$$

$$e^{-i2\pi ua} = \cos(2\pi ua) - i \sin(2\pi ua)$$

から

$$\sin(2\pi ua) = \frac{e^{i2\pi ua} - e^{-i2\pi ua}}{2i} \tag{4-11}$$

となるのでこれを利用すると

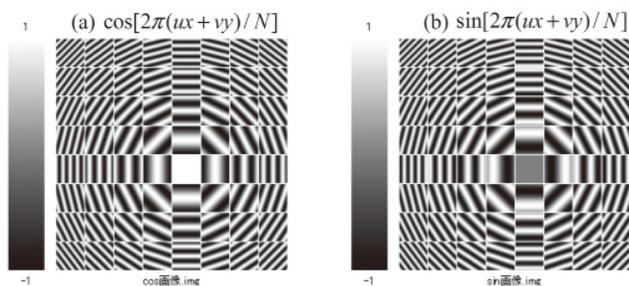


図 4-3 2次元余弦波と2次元正弦波

$$\begin{aligned}
 F(u, v) &= A \frac{\sin(2\pi au)}{\pi u} \frac{\sin(2\pi av)}{\pi v} \\
 &= \frac{4a^2 A \sin(2\pi au)}{2\pi au} \frac{\sin(2\pi av)}{2\pi av} \quad (4-12)
 \end{aligned}$$

となる。

【別解】 偶関数の矩形関数に偶関数の余弦関数を掛けると偶関数になり積分が0でない値をもつ。偶関数の矩形関数に奇関数の正弦関数を掛けると奇関数になるため積分は0になる。余弦関数の積分は正弦関数であるから

$$\begin{aligned}
 F(u, v) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A e^{-i2\pi(ux+vy)} dx dy = A \int_{-a}^a e^{-i2\pi ux} \left\{ \int_{-a}^a e^{-i2\pi vy} dy \right\} dx \\
 &= A \left\{ \int_{-a}^a [\cos(2\pi ux) - i \sin(2\pi ux)] dx \int_{-a}^a [\cos(2\pi vy) - i \sin(2\pi vy)] dy \right\} \\
 &= A \left[\frac{\sin(2\pi ux)}{2\pi u} \right]_{-a}^a \left[\frac{\sin(2\pi vy)}{2\pi v} \right]_{-a}^a = \frac{4a^2 A \sin(2\pi au)}{2\pi au} \frac{\sin(2\pi av)}{2\pi av}
 \end{aligned}$$

図 4-3 (a) は2次元余弦波, (b) は2次元正弦波を示す。四角の領域それぞれが1つの2次元平面波を表し中央の四角が $u = v = 0$ で、このとき2次元余弦波の値は1, 2次元正弦波の値は0である。2次元フーリエ変換は複素数なので実部と虚部に分け次式のように表される。

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i2\pi(ux+vy)} dx dy = F_{\text{Re}}(u, v) + iF_{\text{Im}}(u, v) \quad (4-13)$$

ここで $F_{\text{Re}}(u, v)$, $F_{\text{Im}}(u, v)$ はそれぞれフーリエ変換の実部と虚部であり

$$F_{\text{Re}}(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \cos[2\pi(ux+vy)] dx dy \quad (4-14)$$

$$F_{\text{Im}}(u, v) = -\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \sin[2\pi(ux+vy)] dx dy \quad (4-15)$$

となる。本節では、(4-14), (4-15) 式の離散式が以下で表されるとし、2次元フーリエ変換の計算過程を視覚化する。

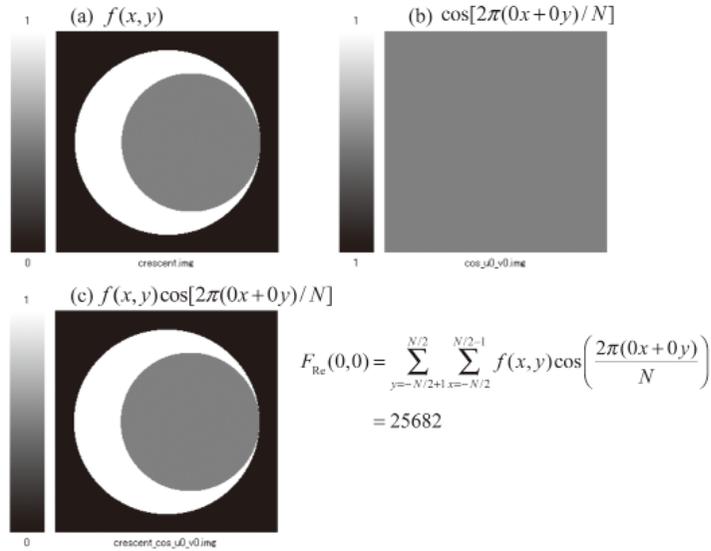


図 4-4 2次元フーリエ変換_実部 $F_{\text{Re}}(0, 0)$ の計算過程

$$F_{\text{Re}}(u, v) = \sum_{y=-N/2+1}^{N/2} \sum_{x=-N/2}^{N/2-1} f(x, y) \cos[2\pi(ux + vy) / N] \tag{4-16}$$

$$F_{\text{Im}}(u, v) = - \sum_{y=-N/2+1}^{N/2} \sum_{x=-N/2}^{N/2-1} f(x, y) \sin[2\pi(ux + vy) / N] \tag{4-17}$$

1次元方向のデータ数を N 、 $f(x, y)$ を $N \times N$ 画素の画像、実空間の添字を $x = -N/2, \dots, 0, \dots, N/2-1$ 、 $y = -N/2+1, \dots, 0, \dots, N/2$ 、周波数空間の添字を $u = -N/2, \dots, 0, \dots, N/2-1$ 、 $v = -N/2+1, \dots, 0, \dots, N/2$ としている。 $\cos [2\pi (ux + vy) / N]$ や $\sin [2\pi (ux + vy) / N]$ の u と v は上記の範囲で変化する。 図 4-4 は (a) 原画像 $f(x, y)$ に (b) $u = v = 0$ の2次元余弦波を掛け算した (c) の総和が $u = v = 0$ における2次元フーリエ変換の実部 $F(0, 0)$ になることを示す (P4-01 2Dproduct.c)。 $F_{\text{Re}}(0, 0)$ は $f(x, y)$ の総和に等しい。 図 4-5 は $u = v = 1$ の2次元余弦波を掛け算し総和 (積和) する $F_{\text{Re}}(1, 1)$ の計算過程を示す。 図 4-6 は $u = 4$ 、 $v = 0$ の2次元余弦波と積和する $F_{\text{Re}}(4, 0)$ 、 図 4-7 は $u = 1$ 、 $v = 2$ の2次元正弦波と積和する $F_{\text{Im}}(1, 2)$ 、 図 4-8 は $u = 0$ 、 $v = 8$ の2次元正弦波と積和する $F_{\text{Im}}(0, 8)$ 、それぞれの計算過程を示す。 図 4-9 はフーリエ変換の原点周辺を示す (128×128画素)。 図 4-4 ~ 図 4-7 で計算した値を枠で囲んでいる。(4-16)、(4-17) 式の $f(x, y)$ と2次元平面波との積和から2次元フーリエ変換を計算する方法は、重積分の考えからフーリエ変換を計算できるので直感的でわかりやすい。しかし、以下に示すように2次元フーリエ変換を行うには for 文が4重となるため演算に時間がかかる。フーリエ変換を理解するはじめの勉強には適するが実際の計算には適さず別の計算法が必要になる。

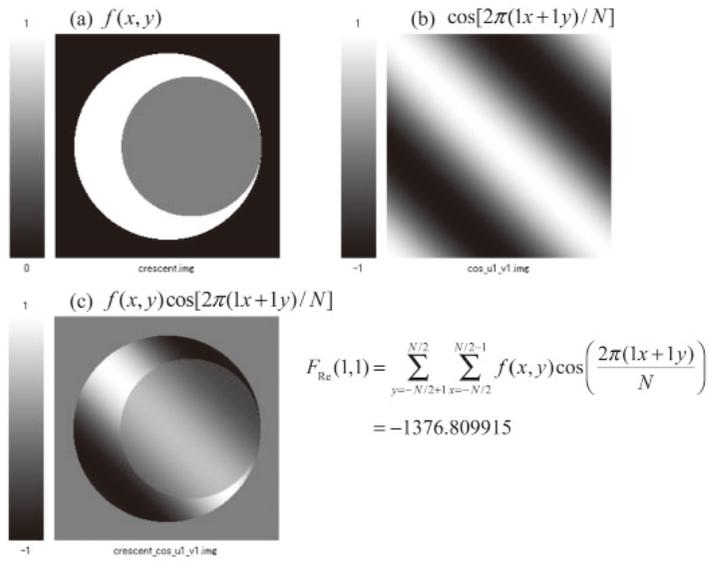


図 4-5 2次元フーリエ変換_実部 $F_{\text{Re}}(1, 1)$ の計算過程

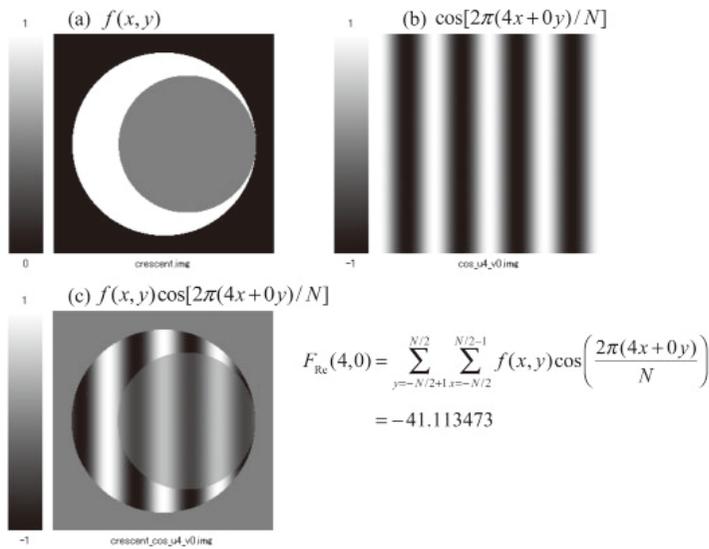


図 4-6 2次元フーリエ変換_実部 $F_{\text{Re}}(4, 0)$ の計算過程

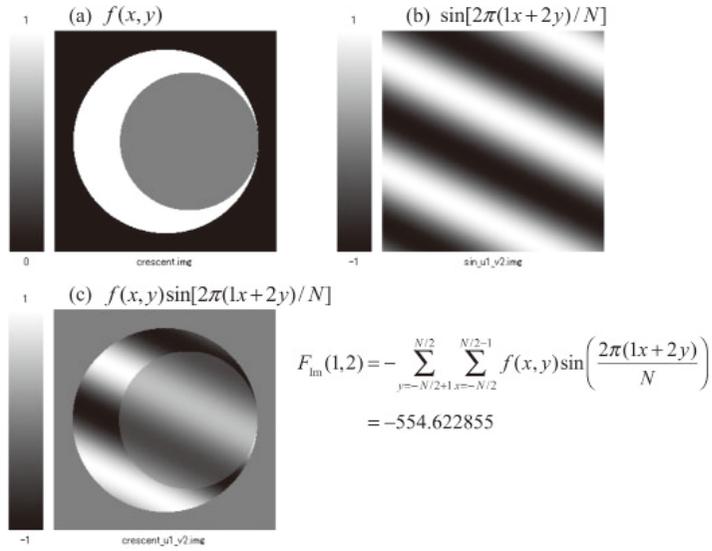


図 4-7 2次元フーリエ変換_虚部 $F_{\text{Im}}(1,2)$ の計算過程

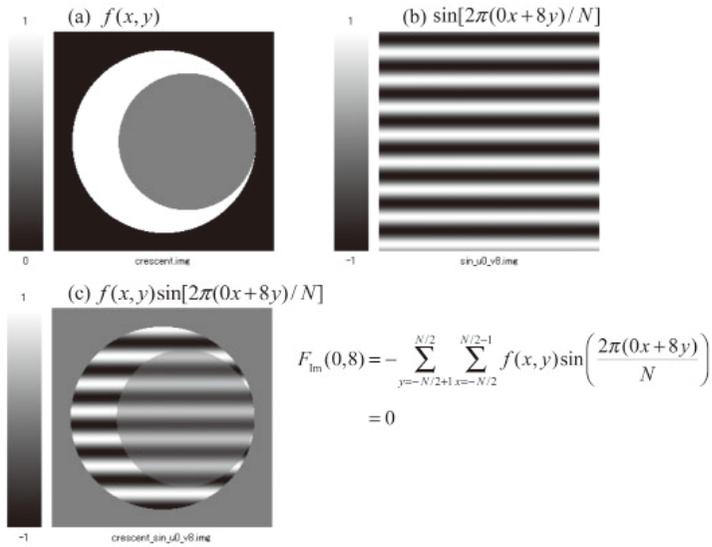


図 4-8 2次元フーリエ変換_虚部 $F_{\text{Im}}(0,8)$ の計算過程