〈 第 6 章 〉 勾配法による画像再構成

6

第 3 章の特異値分解を利用した画像再構成では，係数行列の階数（ランク）不足（1 次独立の行が行列の次数よりも少ない）によって通常の方法では逆行列が求められない場合でも，特異値分解から一般逆行列を求めれば近似的に原画像が復元されることを示した．逐次近似法に対し，解析的画像再構成の代表はフィルタ補正逆投影（FBP）法である．本章では，はじめに係数行列に着目しフィルタ補正逆投影法と最小二乗法とはどのような関係にあるか整理する[55]．次に最小二乗法を特異値分解で解くのとは別に，逐次近似法で解く例として，第 5 章の関数の最適化で述べた勾配法，最急降下法，共役勾配法を画像再構成に応用する．そのための準備としてこれら最適化法の逐次近似式について述べる．

〔第 1 節〕 線形方程式による原画像，係数行列，投影の関係

原画像 $\boldsymbol{f}$ を正方形画像とし 1 辺の画素数を N，総画素数を J（$= N\times N$），投影角度数 M，角度あたりの投影数 N，総投影数を I（$= M\times N$），係数行列を C（$= J\times I$），投影を $\boldsymbol{y}$ とするとき，これらの関係は以下で表される．なお，本書ではベクトルを $\boldsymbol{f}$ や $\boldsymbol{y}$ のようにイタリック体の太字で表している．

$$
\begin{aligned}
C_{11}f_1 + C_{12}f_2 + \cdots C_{1J}f_J &= y_1 \\
C_{21}f_1 + C_{22}f_2 + \cdots C_{2J}f_J &= y_2 \\
&\vdots \\
C_{I1}f_1 + C_{I2}f_2 + \cdots C_{IJ}f_J &= y_I
\end{aligned}
\tag{6-1}
$$

（6-1）式の行列表示は

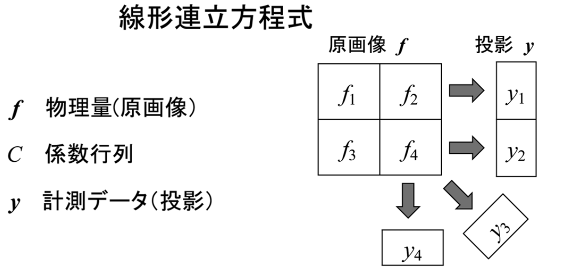
$$
C\,\boldsymbol{f} = \boldsymbol{y} \tag{6-2}
$$

となる．C は行列，$\boldsymbol{f}$ と $\boldsymbol{p}$ は列（縦）ベクトルであり，行列の要素とベクトルの成分で書くと次式で表される．

$$
\sum_{j=1}^{J} C_{ij} f_j = y_i, \qquad i = 1, 2, \cdots, I \tag{6-3}
$$

図 6-1 は（6-1）式の原画像，係数行列，投影の関係を示す．係数行列には計測過程の様々な要因を組み込むことができるが，本書での係数行列は簡単に**図 6-2** のように X 線が画素を横切る長さ，あるいは**図 6-3** のように X 線に幅があると考えそれが画素を横切る面積とする．係数行列 C は次元（行列の行または列の数）が大きいこと，また，1 本の投影に沿って X 線が横切る画素は全画素の一部のため，**図 6-4** のように行列の要素に 0 を多く含む疎行列（スパース行列）となることが特徴である．

ここでノルムについて説明する．ベクトル（ベクトルといっても，数の集まりの数列と考えればよい）は縦に成分を並べて以下のように表す．これを列ベクトルという．



$$C\boldsymbol{f} = \boldsymbol{y} \qquad \begin{array}{ccc} C & \boldsymbol{f} & \boldsymbol{y} \\ \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \end{array}$$

図 6-1　線形連立方程式で表される原画像，係数行列，投影の関係

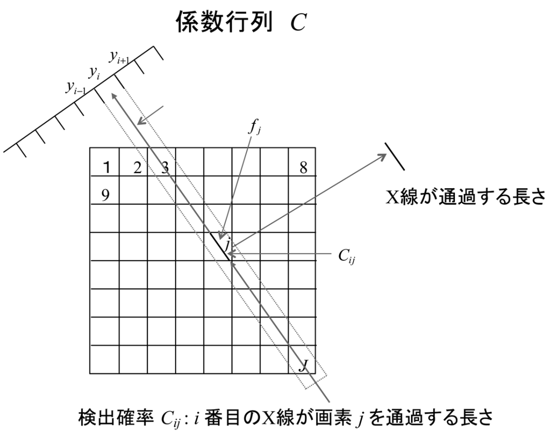


図 6-2　係数行列

i 番目の X 線が画素 j を通過する長さを係数行列とした場合．

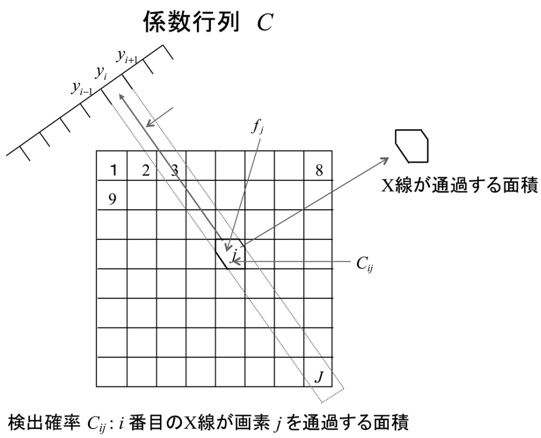


図 6-3　係数行列

i 番目の X 線が画素 j を通過する面債を係数行列とした場合．

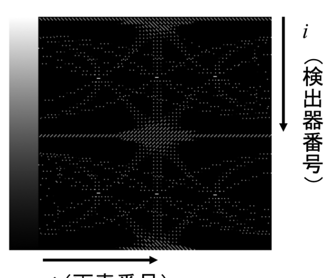


図 6-4　原画像が 64×64 画素（J ＝ 64×64），投影数 64×64（I ＝ 64×64）から作られる係数行列

係数行列の要素数は $J \times I$ = 4096×4096 の 4096 次正方行列となる．表示は 256×256 に縮小している．

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix} \tag{6-4}$$

行ベクトルでは横に成分を並べて以下のように書く．T は行と列を入れ替える操作で転置という．(6-4) 式は n 行 1 列なので行と列を入れ替えると 1 行 n 列となる．

$$\boldsymbol{a}^T=(a_1,a_2\cdots,a_n),\qquad \boldsymbol{b}^T=(b_1,b_2\cdots,b_n) \tag{6-5}$$

ベクトル $\boldsymbol{a}$ とベクトル $\boldsymbol{b}$ の内積 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ はスカラーであり次式で表される．

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}=(a_1,a_2\cdots,a_n)\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots a_nb_n \tag{6-6}$$

図 6-1 は係数行列の 1 例を示しているが，行列の各行は数値が横に並んだ行ベクトルで各列は数値が縦に並んだ列ベクトルある．行列をベクトルの集まりと考えれば，行列とベクトルあるいは行列と行列の掛け算は (6-7) 式の内積を計算していることになる．ベクトルの大きさを測る尺度をノルムと呼び，ノルムは，通常，‖ ‖ の記号を用い以下のように表す．

$$\|\boldsymbol{a}\|_0,\qquad \|\boldsymbol{a}\|_1=\sum_{i=1}^{N}|a_i|,\qquad \|\boldsymbol{a}\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^{N}a_i^2} \tag{6-7}$$

(6-7) 式の 1 番目を L_0 ノルム，2 番目を L_1 ノルム，3 番目を L_2 ノルムという．L_0 ノルムはベクトルの成分のうち 0 でない成分の数，L_1 ノルムは成分の絶対値を足し算したもの，L_2 ノルムは成分の 2 乗を足し算しその平方根をとったものである．例えばベクトル $\boldsymbol{a}$ が

$$\boldsymbol{a}^T=(1,2,0,0,3,4) \tag{6-8}$$

のとき，それぞれのノルムは

$$L_0=\|\boldsymbol{a}\|_0=4 \tag{6-9}$$

$$L_1=\|\boldsymbol{a}\|_1=\sum_{i=1}^{N}|a_i|=1+2+3+4=10 \tag{6-10}$$

$$L_2=\|\boldsymbol{a}\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^{N}a_i^2}=\sqrt{1^2+2^2+3^2+4^2}=\sqrt{30} \tag{6-11}$$

となる．

対称行列の 0 でない固有値の個数をその行列のランク（階数）と呼ぶ．逆行列が存在する行列を正則行列と呼ぶ．$n\times n$ 行列 A が正則行列である必要十分条件はその行列式が 0 でないことであり，これは

ランクが n すなわち行列の行（列）の数が固有値の数になる．$n\times n$ 対称行列が正則行列であればランクが n である．固有値がすべて正の対称行列を正値（または正定値）対称行列といい，固有値がどれも正または 0 の対称行列を半正値（または半正定値）対称行列という．

（6-1）式の係数行列は上記の例のように対称行列ではないが（一般に係数行列は要素に多くの 0 を含む非対称行列），行列 CC^T や C^TC は対角項に関し対称となる．CC^T や C^TC は半正値対称行列である．

$x_1, x_2, \cdots, x_n$ の関数が以下のように x の 1 次の項からなるとき 1 次形式の関数という．

$$h(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = \sum_{i=1}^{n} a_nx_n \tag{6-12}$$

h（x）が 2 次の変数項のみからなる式を 2 次形式と呼ぶ．変数が 2 次以下の項からなる式を 2 次式と呼ぶ．以下の関数は 2 次形式である．

$$h(x) = a_{11}x_2^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{(n-1)n}x_{(n-1)}x_n \tag{6-13}$$

$$h(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \tag{6-14}$$

以下の関数は 2 次式である．

$$h(x) = \frac{1}{2}\left(a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_1x_2\right) - (b_1x_1 + b_2x_2) \tag{6-15}$$

これはベクトルと行列を用いると次式で表される．

$$h(x) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{6-16}$$

（6-16）式で h（x）が 2 次形式であれば $b_1 = b_2 = 0$，$a_{12} = a_{21}$ の対称行列となる．

$$h(x) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{6-17}$$

原画像，係数行列，投影について 例えば $I = J = 2$ の場合，（6-1）式は次式で表される．

$$\begin{aligned} C_{11}f_1 + C_{12}f_2 &= y_1 \\ C_{21}f_1 + C_{22}f_2 &= y_2 \end{aligned} \tag{6-18}$$

行列表示では

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \tag{6-19}$$

となる．（6-2）式の両辺の差が最小になるように未知数 $\boldsymbol{f}$ を決定することを考え，その確からしさに L_2 ノルムの 2 乗を評価関数 Q とすると Q は以下の 2 次関数になる．

$$Q = \|C\,\boldsymbol{f} - \boldsymbol{y}\|_2^2 = (C_{11}f_1 + C_{12}f_2 - y_1)^2 + (C_{21}f_1 + C_{22}f_2 - y_2)^2 \tag{6-20}$$

〔第 2 節〕　一般逆行列

最小二乗法は次式の L_2 ノルムの 2 乗からなる評価関数 Q を最小にするように原画像の近似値を求め

る手法である．

$$Q = \|C\boldsymbol{f} - \boldsymbol{y}\|_2^2 = (C\boldsymbol{f} - \boldsymbol{y})\cdot(C\boldsymbol{f} - \boldsymbol{y}) = (C\boldsymbol{f} - \boldsymbol{y})^T(C\boldsymbol{f} - \boldsymbol{y})$$

$$= (\boldsymbol{f}^T C^T - \boldsymbol{y}^T)(C\boldsymbol{f} - \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{f}^T C^T C\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}^T C^T \boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}^T C\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{y}$$

$$= \boldsymbol{f}^T C^T C\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}^T C^T \boldsymbol{y} - (\boldsymbol{f}^T C^T \boldsymbol{y})^T + \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}^T C^T C\boldsymbol{f} - 2\boldsymbol{f}^T C^T \boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{y} \tag{6-21}$$

ここで・はベクトルの内積を表す．3 行は行列の転置については以下の公式を用いている（列ベクトルは m 行 1 列の行列とみなせる）．

$$(A^T)^T = A, \qquad (ABC)^T = C^T B^T A^T \tag{6-22}$$

また，内積はスカラーであり転置しても値は変わらない．

$$\boldsymbol{y}^T C\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{f}^T C^T \boldsymbol{y})^T \tag{6-23}$$

（6-21）式の $\|C\boldsymbol{f} - \boldsymbol{y}\|_2^2$ は $\|\ \|$ 内のベクトル $C\boldsymbol{f} - \boldsymbol{y}$ について L_2 ノルムを 2 乗したものである．（6-17）式の最小二乗法の評価関数 Q をベクトル $\boldsymbol{f}$ の成分（$f_1, f_2, \cdots, f_n$）について偏微分し 0 と置くと

$$\frac{\partial Q}{\partial f_1} = 0, \qquad \cdots, \qquad \frac{\partial Q}{\partial f_n} = 0 \tag{6-24}$$

以下の式が得られる．

$$\frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{f}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{f}}(\boldsymbol{f}^T C^T C\boldsymbol{f} - 2\boldsymbol{f}^T C^T \boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{y})$$

$$= 2C^T(C\boldsymbol{f} - \boldsymbol{y}) = 0 \tag{6-25}$$

これから原画像の近似値は次式で与えられる．

$$\boldsymbol{f} \approx (C^T C)^{-1} C^T \boldsymbol{y} \tag{6-26}$$

画素数 J に比べ投影数 I が少ない場合の解は，ラグランジュの未定乗数法を用い次式で表される．

$$\boldsymbol{f} \approx C^T (CC^T)^{-1} \boldsymbol{y} \tag{6-27}$$

あるいは以下のように変形して得られる．

$$\boldsymbol{f} = (C^T C)^{-1} C^T \boldsymbol{y} = (C^T C)^{-1} C^T (CC^T)(CC^T)^{-1} \boldsymbol{y}$$

$$= (C^T C)^{-1}(C^T C) C^T (CC^T)^{-1} \boldsymbol{y} = C^T (CC^T)^{-1} \boldsymbol{y} \tag{6-28}$$

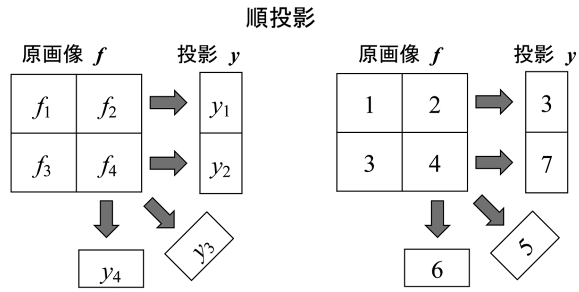
これから $\boldsymbol{f}$ は $\boldsymbol{y}$ に以下の行列を掛け算し近似解として求めることができる．

$$C^+ = \begin{cases} (C^T C)^{-1} C^T \\ C^T (CC^T)^{-1} \end{cases} \tag{6-29}$$

行列 C^+ を C の（ムーア・ペンローズ）一般逆行列という．（6-26）式，（6-27）式は第 3 章の特異値分解で解く方法の他，逐次近似（反復計算）で解く方法がある．以上で最小二乗法によって原画像を近似的に求める式が得られたので，FBP 法との関係について考えてみよう．

〔第 3 節〕　フィルタ補正逆投影法と最小二乗法の関係

図 6-5 は**図 6-1** の 2×2 画素の画像について原画像，係数行列，投影の値を設定した例を示す．**図 6-5** は（6-2）式と以下の実際の数値を併記して投影（順投影）を表している．



$$\overset{C}{\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{pmatrix}} \overset{\boldsymbol{f}}{\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix}} = \overset{\boldsymbol{y}}{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}} \qquad \overset{C}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \overset{\boldsymbol{f}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}} = \overset{\boldsymbol{y}}{\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}}$$

図 6-5　順投影の模式図

$$\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{array}{cc} & \to j \\ \downarrow i & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \tag{6-30}$$

係数行列の要素 C_{ij} は X 線が画素を横切る長さを表す． 45° 方向では画素の長さが 1 ではなく $\sqrt{2}$ となるが簡単のため 1 としている．原画像 $\boldsymbol{f}$ は列ベクトルで表し画素の番号を添字 j，投影 $\boldsymbol{y}$ は列ベクトルで表し投影の番号を添字 i，係数行列 C の行は投影の番号 i，列は画素の番号 j を表している．係数行列 C とベクトル $\boldsymbol{f}$ の掛け算から投影 $\boldsymbol{y}$ が得られる．

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = C\,\boldsymbol{f} = \begin{array}{cc} & \to j \\ \downarrow i & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \tag{6-31}$$

係数行列 C の行と列を入れ替えた転置行列では，列は投影の番号 i，行は画素の番号 j となる．

$$C = \begin{array}{cc} & \to j \\ \downarrow i & \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{pmatrix} \end{array}, \quad C^T = \begin{array}{cc} & \to i \\ \downarrow j & \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} & C_{41} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} & C_{42} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{43} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} \end{pmatrix} \end{array} \tag{6-32}$$

FBP 法の逆投影（平行ビームを仮定している）は，投影の値をその投影を得た検出器に垂直な直線上に戻す操作であるから，フィルタ補正をしないで戻すと図 6-6 になる．各画素について逆投影された投影の値を足し算すると図 6-7 になる．係数行列の転置行列を用いると逆投影は次式で表される．

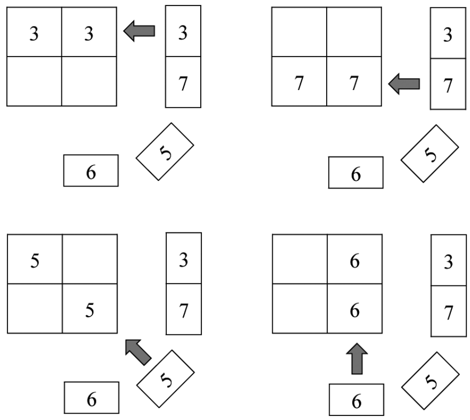


図 6-6　フィルタ補正逆投影法で行われる逆投影（フィルタ補正なしの場合）

投影に着目した 1 方向ごとの逆投影の過程を示す.

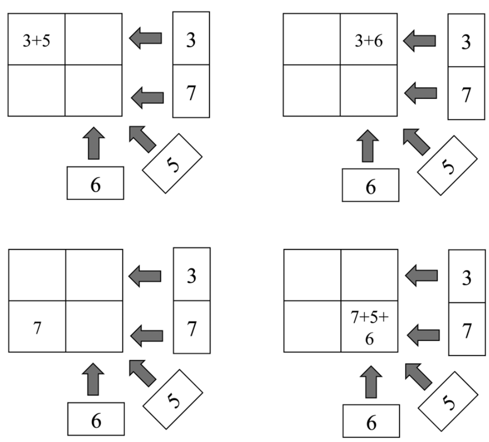


図 6-7　逆投影

画素に着目した逆投影の過程を示す．係数行列が 0 でない投影からの寄与が足し算される.

$$\boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{pmatrix} = C^T \boldsymbol{y} = \begin{array}{cc} & \rightarrow i \\ \downarrow j & \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} & C_{41} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} & C_{42} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{43} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 7 \\ 18 \end{pmatrix} \quad (6\text{-}33)$$

例えば g_1 の計算は以下のように，投影と係数行列 C の下付添字の 2 番目が 1 に固定され（1 番目の画素に相当），1 番目の添字が 1，2，3，4 と投影の順番に並び，係数行列 C の転置行列と投影の積の足し算から逆投影の値が得られる式になっている.