〈 第 1 章 〉

繰り返しを利用した画像再構成

1

X 線 CT（CT）や磁気共鳴イメージング（MRI）の画像再構成で使われているフーリエ変換法やフィルタ補正逆投影法（FBP 法）のような解析的に直接再構成する方法がある [1), 2)]．画像再構成法にはその解析的な方法のほかに，繰り返し（反復）を利用して徐々に解に近づけていく逐次近似画像再構成法がある [3) ～14)]．本章では繰り返しを利用した方法の考え方と具体的な方法について，1）繰り返しを利用した方法，2）投影と逆投影，3）代数的画像再構成法の順に解説する [15)]．

〔第 1 節〕 繰り返しを利用した方法

解析的な画像再構成法の一般的な手順は，計算の道具である数式を実際の計測に合わせて定式化するところから始まる．このような計測を定式化することを順問題という．また，定式化した順問題の式から逆に式を解くことを逆問題という．この順問題と逆問題の関係は，簡単な算数の問題でも行われている．そこで簡単な例について考えてみよう．「1 個 50 円のペンを何個か購入したら 500 円になった」という事例があったとする．この場合，1 個が 50 円というのは元々わかっていることであり，購入した金額の 500 円が計測されたデータである．何個購入したかわからないのでそれを x と置くと今回の事例を次式のように定式化することができる．

$$50x = 500 \tag{1-1}$$

これが順問題である．この式から逆に x を求めるように解くのが逆問題である．これは簡単な方程式なので，私たちは x を求めるのに両辺を 50 で割ればよいということを知っている．よって，この逆問題の解法は「計測データを 50 で割る」ということになる．一度解ければ計測データが 500 円以外であっても同じ「50 で割る」という方法で解くことができる．これが解析的な方法である．計測データを y と置いて順問題の式を一般的な形に書き換えると

$$y = 50x \tag{1-2}$$

となる．これを x について解析的に解いた式は

$$x = \frac{y}{50} \tag{1-3}$$

となる．これらの様子を入力と出力という形で示すと**図 1-1** のようになる．

今度は，方程式を解く方法を私たちは知らないと仮定しよう．（1-1）式の順問題の式はわかっているが，その式から x を直接求める方法はわからない．この場合，まず考えられるのは x に適当な数字を当てはめて順問題の式が成り立つときの x の値を探していくという方法であろう．単純に x の値を「1, 2, 3, …」と変えていって最も近いところを探していく方法もあるが，もう少し一般的で効率のいい方

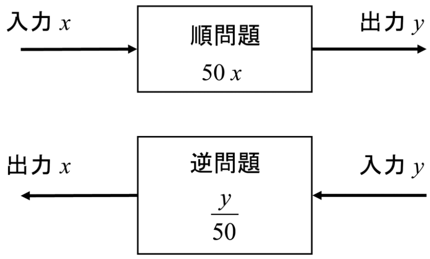


図 1-1　順問題と逆問題の関係

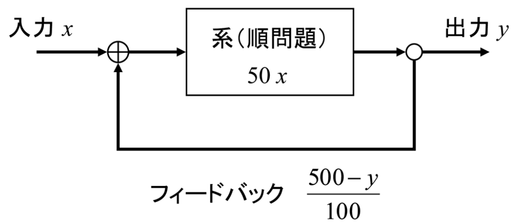


図 1-2　フィードバックの様子

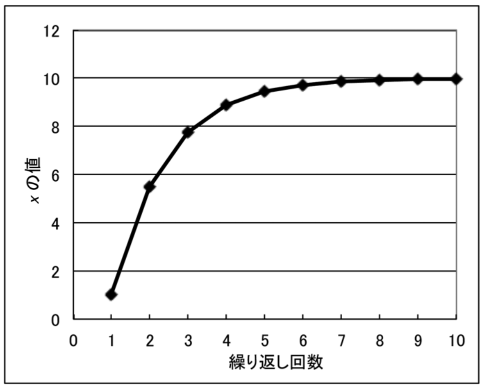


図 1-3 「差分に 1/100 を掛けてから加える」という フィードバックを行って繰り返した結果

法を考えてみる．例えば x に初期値として 1 を当てはめてみると，左辺が 50 で右辺が 500 となり両辺で 450 の差分が出る．その差分を利用して次の x を決めることを考える．これは制御でよく用いられるフィードバックの考え方である．フィードバックの方法はいろいろ考えられるが，差分に 1/100 を掛けて戻す（初期値に加える）ことを考えてみる．すると，次の x の値は，1 + 4.5 = 5.5 となる．この手順を繰り返していくとどのようになるであろうか．このフィードバックの様子は**図 1-2** のようになる．入力は x の値で，系は x に 50 を掛けるという順問題になり，出力はその結果の y となる．その y の値を用いて計測データである 500 からの差分に 1/100 を掛け算したものをフィードバックしている．次にこの手順を数式で表してみる．k 回目の x の値を $x^{(k)}$，次の $k+1$ 回目の x の値を $x^{(k+1)}$ とするとこの手順は

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \frac{500 - 50 \cdot x^{(k)}}{100} \tag{1-4}$$

と表せる．$50 \cdot x^{(k)}$ が k 回目の x に対する順問題の式を表している．この順問題の計算値と計測データである 500 との差分を計算し，100 で割った値を k 回目の x の値に加えて $k+1$ 回目の x の値を作成している．この式を用いた x の値の推移を Excel で計算し，グラフにしたものを**図 1-3** に示す．回数を重ねるごとに徐々に（1-1）式の解である 10 に近づいている．このように方程式を解くという逆問題を使わずに，順問題だけで繰り返しながら解に近づける方法が繰り返しの方法である．

繰り返しの方法では必要になる事柄は少なくとも 2 点あることが今回の例からわかる．1 点目は順問

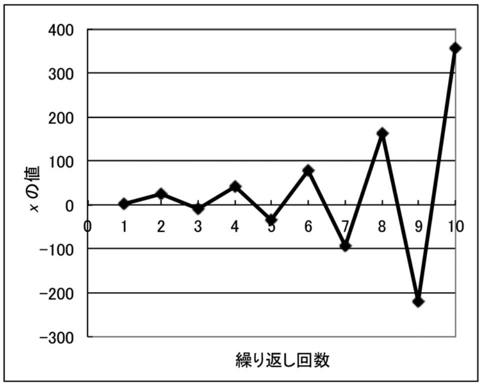


図 1-4　「差分に 1/20 を掛けてから加える」という フィードバックを行って繰り返した結果

題の定式化である．私たちが問題を解くときに使う道具は数式なので，いずれの方法をとるにしても問題を定式化しなければならない．2 点目はフィードバックの方法である．今回の例では「差分に 1/100 を掛けてから加える」という方法をとった．フィードバックの方法によってはうまく解に到達しない場合も考えられる．例えば「差分に 1/20 を掛けてから加える」とした場合

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \frac{500 - 50 \cdot x^{(k)}}{20} \tag{1-5}$$

となるが，これを Excel で実行すると**図 1-4** に示すように値が発散してしまう．このように繰り返しの方法においては，フィードバックに十分注意を払う必要がある．

〔第 2 節〕　投影と逆投影

本節では X 線 CT の順問題を考える．計測対象は X 線を照射する被写体の線減弱係数となり，計測データは X 線が被写体を透過して反対側の検出器で計測される X 線の強度である．照射する X 線の強度は一定とし被写体の線減弱係数は位置に依存した分布を持つとする．照射する X 線の強度を I_0，計測される X 線の強度を I，2 次元の被写体分布を $f(x, y)$ とすると順問題は

$$I = I_0 \exp(-\int_l f(x, y)\, dl) \tag{1-6}$$

と表される．ここで，l は X 線が通過した直線の経路を表す．その様子を**図 1-5** に示す．被写体に照射された X 線は被写体内で減弱する．その減弱割合は，X 線の経路に沿って被写体の線減弱係数 $f(x, y)$ を積分した（足し合わせた）値に負記号を付け自然対数 e のべき乗（exp の演算）にしたものである．ただし，2 次元の線減弱係数分布を考えているので，X 線 CT の場合は被写体に対して全領域を覆うようにスキャン（X 線源と検出器を平行移動して計測）し，さらにそれを 1 回転して計測する．その様子を座標系も加えて**図 1-6** に示す．被写体のある固定された座標系を x-o-y として，その座標系から角度 θ 回転した座標系を X-o-Y とする．その回転した座標系の Y 軸に沿って強度 I_0 の X 線を照射して計測したデータを $I(X, \theta)$ とする．計測データはスキャンと回転をして計測されるので X と θ に関する 2 次元データとして式で表される．

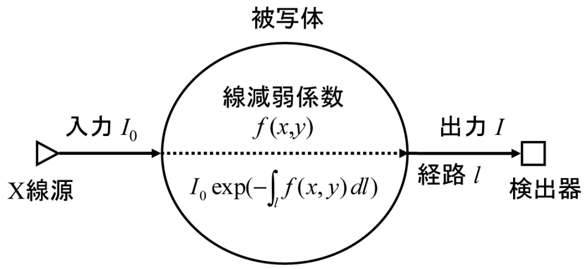


図 1-5　X 線源から X 線を被写体に照射し反対側の検出器で X 線の強度を検出する様子

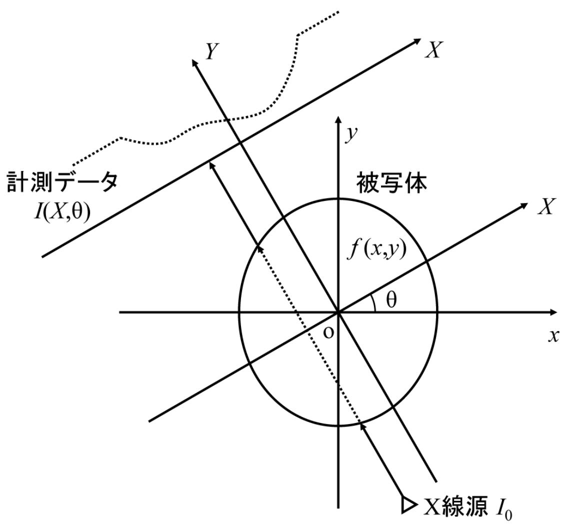


図 1-6　座標系を含めた X 線 CT の計測の様子

$$I(X,\theta) = I_0 \exp(-\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dY) \tag{1-7}$$

線減弱係数の積分経路は Y 軸に沿って $-\infty$ から ∞ までとする．これが順問題の式となるが，この式では exp が入って複雑なので X 線の初期強度 I_0 が既知であるということから一般的には以下のように変形する．

$$\frac{I(X,\theta)}{I_0} = \exp(-\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dY) \tag{1-8}$$

両辺の自然対数をとり

$$\ln\frac{I(X,\theta)}{I_0} = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dY \tag{1-9}$$

右辺を正にするため左辺の上下を入れ替える．

$$\ln\frac{I_0}{I(X,\theta)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dY \tag{1-10}$$

（1-10）式の左辺を $p\,(X,\theta)$ と置くと次式が得られる．

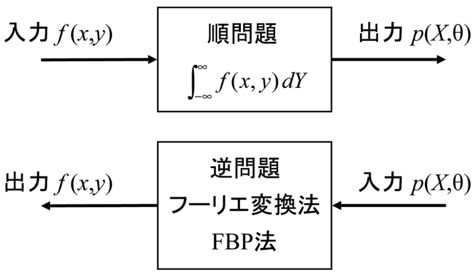


図 1-7　X 線 CT の順問題と逆問題

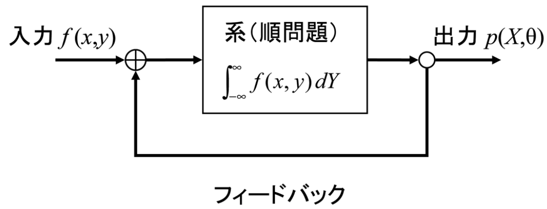


図 1-8　X 線 CT における繰り返しの方法

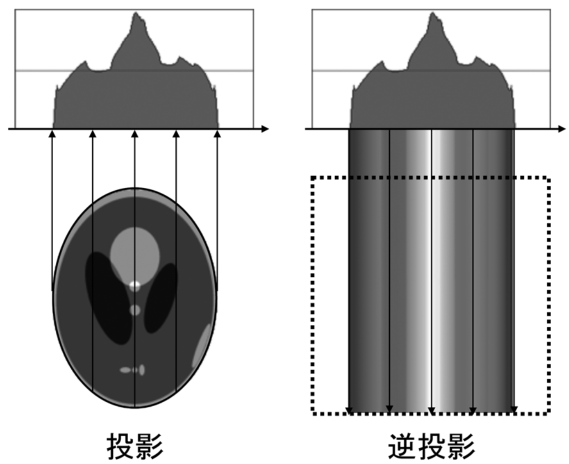


図 1-9　ある角度における投影と逆投影の模式図

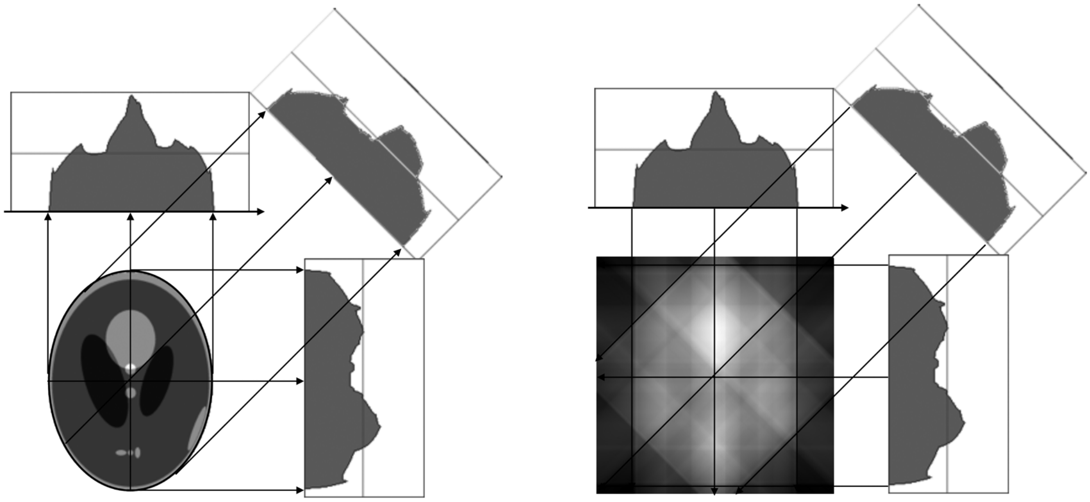
$$p(X,\theta)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dY \tag{1-11}$$

ここで $p\,(X,\,\theta)$ は計測データ $I\,(X,\,\theta)$ と I_0 の比を対数変換したもので投影あるいは投影データと呼ぶ．この（1-11）式は線減弱係数分布 $f\,(x,\,y)$ を原画像と考えるとそれを線積分によって投影に変換するものでラドン変換という．このラドン変換は線減弱係数を Y 軸に沿って線積分した形になっている．X 線 CT では，このラドン変換を順問題とする．この順問題では入力が $f\,(x,\,y)$ で出力が $p\,(X,\,\theta)$ ということになる．すると，順問題と逆問題の関係は**図 1-7** のように表すことができる．解析的な方法で逆問題を解いたものにフーリエ変換法や FBP 法がある．

次に逆問題を解いた解析的な方法がわからないものとして，これを繰り返しの方法に当てはめると**図 1-8** のようになる．順問題は定式化しているので，ここで問題となるのはフィードバックの方法である．このフィードバックに使われる手法の 1 つである逆投影の考え方について解説する．投影データは被写体 $f\,(x,\,y)$ をスキャンと回転をしながら線積分して求める．逆投影とは次式のように投影データを被写体の方向に向かって直線状にデータを加えていく操作である．

$$g(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} p(X,\theta)\,d\theta \tag{1-12}$$

図 1-9 に 1 つの角度に関する投影と逆投影の模式図を示す．投影では線積分が投影データの値となり，



投影　　　　逆投影

図 1-10　0°，45°，90° における投影と逆投影

（a）投影の様子，（b）逆投影の様子

逆投影では投影データの値がそのまま直線状に画像領域に加えられる．投影と逆投影を 0°，45°，90° のみで行った例を**図 1-10**（a），（b）に示す．**図 1-10**（a）では，被写体の画像から 0°，45°，90° の投影を作成している様子を示している．**図 1-10**（b）では，その 3 つの投影から逆投影している様子を示している．この投影と逆投影を 360° について 256 方向（投影角度数が 256）から行った様子を**図 1-11** に示す．投影データは横方向をスキャンの X 方向，縦方向を回転の θ 方向とするサイノグラムとして表示する．逆投影した画像は非常にぼけている．解析的な方法である FBP 法では，このぼけをフィルタ処理で除去してから逆投影をすることで真の画像に近づける．

〔第 3 節〕　代数的逐次近似法

X 線 CT の画像再構成において繰り返しの方法を用いる概念と道具が揃ったので，本節では最も単純な繰り返しの方法を紹介する．X 線 CT の順問題は解決しているので，繰り返しを用いるためのフィードバックの方法を考える．その方法は逆投影を利用するが，基本的には「ペンを何個購入したか」のときに使った方法とさほど変わらない．ペンを購入したときに支払った金額の 500 円に相当するのが投影データとなる．はじめに適当に予想した画像を作成しておき順問題である投影処理を行う．投影処理の結果と計測からわかっている投影データの差分を求め，それを逆投影してもとの画像に戻す（加える）．この手順をフィードバックの図で示すと，**図 1-12** のようになる．k 回目の画像を $f(x, y)^{(k)}$ とし，$k+1$ 回目の画像を $f(x, y)^{(k+1)}$ としたとき，この繰り返しの方法は次式で表される．

$$f(x,y)^{(k+1)} = f(x,y)^{(k)} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\{p(X,\theta) - \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)^{(k)}\,dY\}\,d\theta \tag{1-13}$$

代数的方法[16] には多くの種類がありまた名称も必ずしも統一されていない．投影と逆投影を 1 つの投影角度ごとに行って画像を更新していく方法を Kak ら[17] は SART（simultaneous algebraic reconstruction technique）法，投影と差分の逆投影をすべての角度で行ってから画像を更新していく

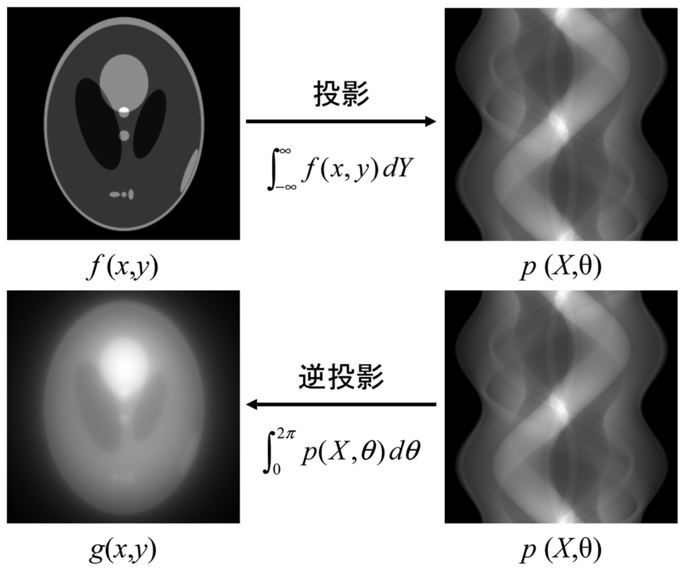


図 1-11　360° について投影角度数 256 の投影（検出器数は 256）を用いた投影と逆投影

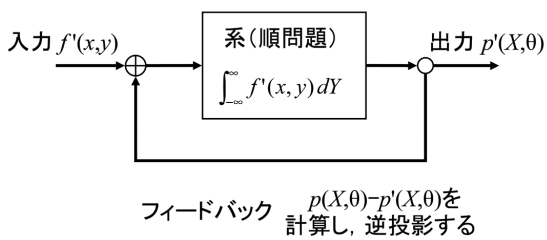


図 1-12　フィードバックの考えによる X 線 CT における繰り返しの方法

方法を SIRT（simultaneous reconstruction technique）法[18] と名付けている．Kak らの名称によれば，第 1 章，第 4 章で ART としているのは SART に相当する．一方，ART と呼んでいる方法であっても 1 つの投影ごとに画像を更新するのではなく投影角度ごとに更新していることが多い．そこで本書では特に SART とはせずに ART と記載している．一方，第 7 章の ART は 1 つの投影ごとに画像更新することを前提に ART の式を導出している． ART 法は投影角度ごとに画像を更新していくので収束を速めるが，反復計算において収束せず発散してしまう可能性が多少高くなる．逆に，SIRT 法はすべての角度で実測の投影と計算した投影の差分を逆投影し画像を更新するので収束は遅くなるが，値が発散する可能性は ART 法に比べて低くなる．

代数的方法をプログラム化する際，(1-13) 式をそのままプログラム化し実行すると値が発散してしまう．最初に解説したペンの例で示したように 100 で割ったものを戻した場合は発散しなかったが 20 で割った場合は発散してしまった．そこで (1-13) 式でも同じように k 回目の $f(x, y)$ にフィードバックを加える前に適当な値で割って小さくしておくと発散を抑えることができる．数値シミュレーションでは次式のようにフィードバックの際に 2000 で割ってから戻すようにした．