

## 〈 第 3 章 〉

# 3 次元コーンビームの 投影と画像再構成

# 3

第 2 章は CT の世界でよく使われている 2 次元のファン（扇状）ビームからの画像再構成について解説した。本章では 2 次元ファンビームから重み付けした重畳積分法を利用し、直接画像再構成する方法を利用した 3 次元のコーン（円錐状）ビームの投影データから近似的に画像再構成する Feldkamp の方法について、1) 3 次元数値ファントム、2) 2 次元ファンビームの投影データ、3) 3 次元コーンビームの投影データ、4) 2 次元ファンビーム画像再構成法のベクトル表記、5) Feldkamp の画像再構成法の順に解説する。

### 〔第 1 節〕 3 次元数値ファントム

3 次元の投影と再構成を議論する前に、3 次元数値ファントムについて解説する。3 次元 Shepp-Logan ファントムに代表される 3 次元数値ファントムは楕円体の組み合わせで作成される。楕円体の基本式は

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (3-1)$$

となる。これに図 3-1 に示すように平行移動と回転を加えるとすべての楕円体を表現できる。なお、第 3 章から第 6 章では、プログラムを作成する際、配列データの座標と数学の座標の関係は図 3-1 の 2 列に示すようにとっている。平行移動は、移動量は  $(x_0, y_0, z_0)$  の引き算で表すことができるので、移動前の座標を  $(x, y, z)$  とし移動後の座標を  $(x_1, y_1, z_1)$  とすると次式で表される。

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \quad (3-2)$$

3 次元の回転は 3 つの軸周りの回転で表される。x 軸周りの回転は回転前の座標を  $(x, y, z)$ 、回転後の座標を  $(x_2, y_2, z_2)$  とするとき、 $3 \times 3$  の行列を用い次式で表される。

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_x & \sin \theta_x \\ 0 & -\sin \theta_x & \cos \theta_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (3-3)$$

ここで  $\theta_x$  は x 軸周りの回転角度を表す。同様に y 軸周りでは回転角度を  $\theta_y$  とし、回転後の座標を  $(x_3, y_3, z_3)$  とするとき

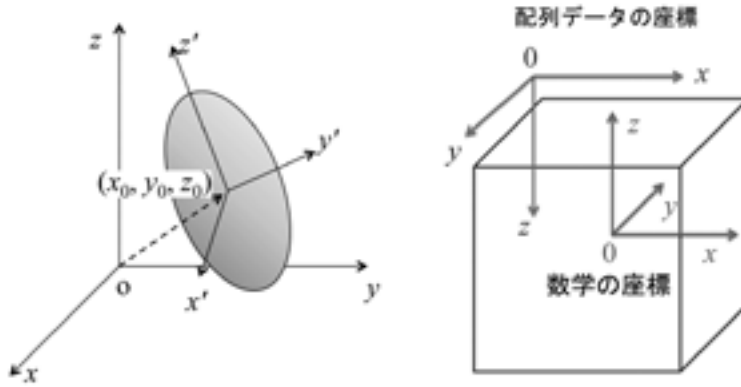


図 3-1 楕円体の平行移動と回転

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_y & 0 & -\sin \theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta_y & 0 & \cos \theta_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (3-4)$$

となり、 $z$  軸周りでは回転角度を  $\theta_z$  とし、回転後の座標を  $(x_4, y_4, z_4)$  とするとき

$$\begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_z & \sin \theta_z & 0 \\ -\sin \theta_z & \cos \theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (3-5)$$

となる。楕円体の場合、移動してからそこで回転を行って位置を決めている。回転を  $x$  軸、 $y$  軸、 $z$  軸周りの順で行うとすると、全体の回転と移動の式は、以下のようにまとめられる。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_z & \sin \theta_z & 0 \\ -\sin \theta_z & \cos \theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_y & 0 & -\sin \theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta_y & 0 & \cos \theta_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_x & \sin \theta_x \\ 0 & -\sin \theta_x & \cos \theta_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \quad (3-6)$$

よって、移動回転した楕円の式は

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 1 \quad (3-7)$$

となる。(3-6) 式と (3-7) 式を合わせるとすべての楕円体が表現される。回転の式は以下のように  $3 \times 3$  マトリクスの行列にまとめられる。

$$\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_z & \sin \theta_z & 0 \\ -\sin \theta_z & \cos \theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_y & 0 & -\sin \theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta_y & 0 & \cos \theta_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_x & \sin \theta_x \\ 0 & -\sin \theta_x & \cos \theta_x \end{pmatrix} \quad (3-8)$$

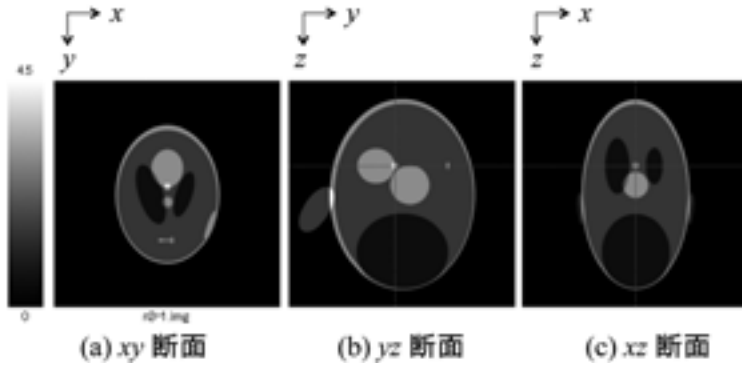


図 3-2 3次元数値ファントム

楕円体を組み合わせて作成したもので座標 (128, 120, 96) を通る断面をそれぞれ Disp3d にて表示している. (a)  $xy$  断面 (横断面), (b)  $yz$  断面 (矢状面), (c)  $xz$  断面 (冠状面). グレーバーの数値は最大値, 最小値を示す.

楕円体の数値ファントム画像を作成するには, 画像のそれぞれの点  $(x, y, z)$  が楕円体に含まれるかを判定し, 含まれる場合は楕円体の濃度を画像に加えていく. 複数の楕円体がある場合は, 同じ処理を楕円体の数だけ行う.

プログラムにするときは以下の手順となる.

- (1) 繰り返しを利用して, 判定する1点の座標  $(x, y, z)$  を決める.
- (2) 座標を楕円の平行移動量  $(x_0, y_0, z_0)$  だけ平行移動する.
- (3) 平行移動した座標を (3-8) 式の回転マトリクスを利用して回転する.
- (4) (3-7) 式を利用して, 楕円体の内部かを判断する. 判断には以下の不等式を利用する. 左辺が1以下であれば座標  $(x, y, z)$  は楕円体の内部にあることになる.

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} \leq 1 \tag{3-9}$$

- (5) 楕円体の内部と判断されたら, 画像の  $(x, y, z)$  の位置に楕円体の濃度を加える.

以上の処理をして作成した3次元 (3D) Shepp-Logan 数値ファントムを図 3-2 に示す. この3次元数値ファントムは,  $256 \times 256 \times 256$  ボクセルで作成されている. 座標 (128, 120, 96) を通る  $xy$  断面 (横断面),  $yz$  断面 (矢状面),  $xz$  断面 (冠状面) をそれぞれ図 3-2 (a), (b), (c) に示している.

## 〔第2節〕 2次元ファンビームの投影

2次元ファンビームの投影データを楕円の数値ファントムから直接求めることを考える. この場合, 楕円の式とファンビームの X 線が通る直線の式との交点を導き出すことになる. 図 3-3 に示すような平行移動と回転を考慮した楕円の式は

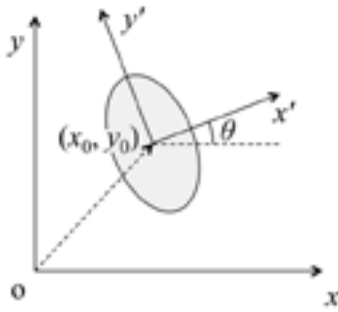


図 3-3 楕円の平行移動と回転

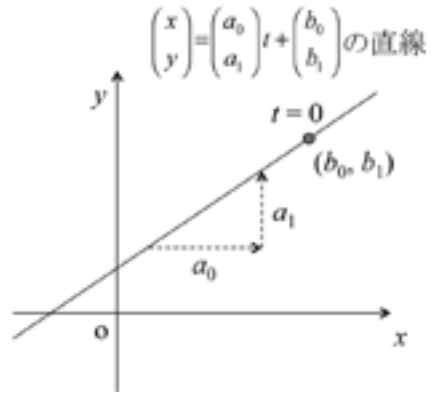


図 3-4 ベクトルで表現した直線

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \quad (3-10)$$

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 \quad (3-11)$$

となる。また、直線はベクトルを用いると次式で表される。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix} \quad (3-12)$$

図 3-4 に示すように、 $(a_0, a_1)^T$  は直線の方向ベクトルを表すので単位ベクトルにしておく。また、 $(b_0, b_1)^T$  は直線上の任意の点であり、 $t = 0$  のときの座標の位置に対応する。

この直線の式をファンビームの X 線が通る直線に対応させる。方向ベクトルは直線上の 2 点がわかれば算出できる。図 3-5 のファンビームの幾何学配置から線源の位置  $(S_x, S_y)$  は

$$\begin{pmatrix} S_x \\ S_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -D \sin \beta \\ D \cos \beta \end{pmatrix} \quad (3-13)$$

となる。また、X 線が検出器に入射した位置  $(d_x, d_y)$  は

$$\begin{pmatrix} d_x \\ d_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \cos \beta \\ X \sin \beta \end{pmatrix} \quad (3-14)$$

となる。方向ベクトルは両者の差から次式で表される。

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} S_x \\ S_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \cos \beta + D \sin \beta \\ X \sin \beta - D \cos \beta \end{pmatrix} \quad (3-15)$$

そして、単位ベクトルにするため線源から検出器への入射位置までの距離で除算する。

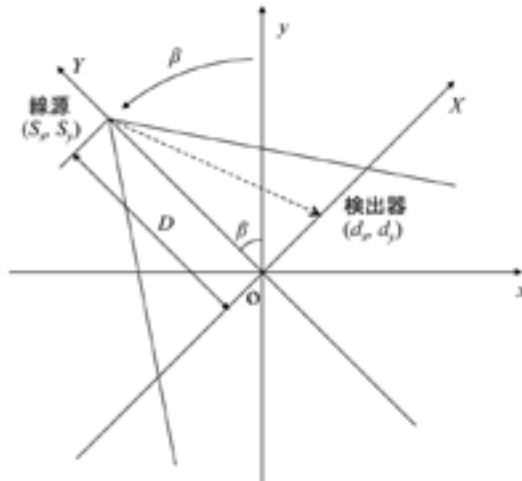


図 3-5 2次元ファンビームにおける座標系と幾何学配置

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{D^2 + X^2}} \begin{pmatrix} X \cos \beta + D \sin \beta \\ X \sin \beta - D \cos \beta \end{pmatrix} \quad (3-16)$$

また、直線上の任意の点は線源の位置でよいので

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_x \\ S_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -D \sin \beta \\ D \cos \beta \end{pmatrix} \quad (3-17)$$

とすることができる。

投影は楕円と直線の交点から求められる。そこで、(3-10) 式に (3-12) 式を代入し

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} b_0 - x_0 \\ b_1 - y_0 \end{pmatrix} \right) \quad (3-18)$$

回転の行列を分配すると次式が得られる。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 - x_0 \\ b_1 - y_0 \end{pmatrix} \quad (3-19)$$

この式は  $x' y'$  座標系に合わせた新たな直線の式になっている。この (3-18) 式を楕円の (3-11) 式に代入して、 $t$  について解くと交点が求まる。(3-19) 式を簡略化するために以下のように置く。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 \end{pmatrix} \quad (3-20)$$

ここで、

$$\begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \quad (3-21)$$

$$\begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 - x_0 \\ b_1 - y_0 \end{pmatrix} \quad (3-22)$$

である。(3-20) 式を楕円の (3-11) 式に代入すると,

$$\frac{(A_0 t + B_0)^2}{a^2} + \frac{(A_1 t + B_1)^2}{b^2} = 1 \quad (3-23)$$

となる。この式を展開して  $t$  についてまとめると,

$$a' t^2 + 2b' t + c' = 0 \quad (3-24)$$

$$\begin{cases} a' = \frac{A_0^2}{a^2} + \frac{A_1^2}{b^2} \\ b' = \frac{A_0 B_0}{a^2} + \frac{A_1 B_1}{b^2} \\ c' = \frac{B_0^2}{a^2} + \frac{B_1^2}{b^2} - 1 \end{cases} \quad (3-25)$$

よって、解は以下の2つとなる。

$$t_0 = \frac{b' - \sqrt{b'^2 - a'c'}}{a'}, \quad t_1 = \frac{b' + \sqrt{b'^2 - a'c'}}{a'} \quad (3-26)$$

投影は、 $t$  について解いた2つの解の差に楕円の濃度  $d$  を掛けたものとなる。したがって、求めるべき投影の値は次式で表される。

$$p'(X, \beta) = d(t_1 - t_0) = \frac{2d\sqrt{b'^2 - a'c'}}{a'} \quad (3-27)$$

プログラムにするときは以下の手順となる。

- (1) 繰り返しを利用して、求めたい投影の1点の位置  $(X, \beta)$  を決める。
- (2)  $D, X, \beta$  の値を用いて (3-16) 式と (3-17) 式から  $a_0, a_1, b_0, b_1$  の値を求める。
- (3)  $a_0, a_1, b_0, b_1$  の値を用いて (3-21) 式と (3-22) 式から  $A_0, A_1, B_0, B_1$  の値を求める。
- (4)  $A_0, A_1, B_0, B_1$  の値を用いて (3-25) 式から  $a', b', c'$  の値を求める。
- (5)  $a', b', c'$  の値から判別式  $b'^2 - a'c'$  の値を求める。
- (6) 判別式が正の場合、(3-27) 式を用いて値を求め、対応する投影データに加える。

### 〔第3節〕 3次元コーンビームの投影

3次元コーンビームに対する投影は、図3-6に示すように線源から円錐状に放出されたX線を2次元の平面検出器で検出し、被写体の周りを1周し収集する。投影データは、 $XZ$  平面上の2次元検出器のデータを、角度  $\beta$  を  $0 \sim 2\pi$  まで変化させ収集する3次元データとなる。数値シミュレーションを行うときは、楕円体の数値ファントムからの投影データを作成する。楕円体からの投影の作成は、楕円体

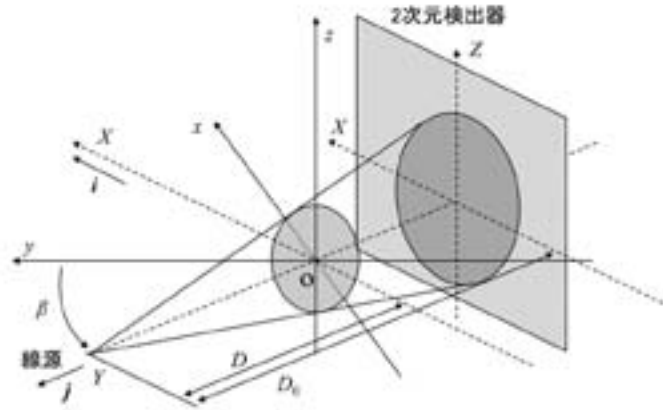


図 3-6 3次元コーンビーム投影の幾何学的配置

と直線の交点を求めることにある。数学的には楕円体の式と3次元の直線の式を使い交点を求める。中心が原点にあり、軸に対して回転していない楕円体の基本式は、

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (3-28)$$

となる。3次元の直線の式は次式で表される。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad (3-29)$$

ここで、 $(a_0, a_1, a_2)$  は直線の傾きを表す方向ベクトルであり単位ベクトルにしておく。 $(b_0, b_1, b_2)$  は直線上の1点の座標である。投影を作成する具体的な手順を以下に示す。

①線源から検出器までの直線の式を求める。

方向ベクトル  $(a_0, a_1, a_2)$  は、線源と対象となる検出器の座標の差で求める。線源の位置  $(S_x, S_y, S_z)$  は

$$\begin{pmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -D \sin \beta \\ D \cos \beta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3-30)$$

となる。また、X線が検出器に入射した位置  $(d_x, d_y, d_z)$  は

$$\begin{pmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \cos \beta \\ X \sin \beta \\ Z \end{pmatrix} \quad (3-31)$$

となる。よって単位ベクトルにした方向ベクトル  $(a_0, a_1, a_2)$  は次式で表される。

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{D^2 + X^2 + Z^2}} \begin{pmatrix} X \cos \beta + D \sin \beta \\ X \sin \beta - D \cos \beta \\ Z \end{pmatrix} \quad (3-32)$$

直線上の1点を線源の座標  $(S_x, S_y, S_z)$  と置くことで

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -D \sin \beta \\ D \cos \beta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3-33)$$

が得られる。

②直線の式を楕円体の回転と移動の式に代入する。

楕円体の回転行列を(3-8)式で表すと、方向ベクトルの回転は

$$\begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad (3-34)$$

と表され、直線上の1点に選んだ検出器の座標の移動と回転の式は

$$\begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 - x_0 \\ b_1 - y_0 \\ b_2 - z_0 \end{pmatrix} \quad (3-35)$$

と表される。よって直線の式は

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \quad (3-36)$$

となる。

③算出した直線の式を楕円体の式に代入して  $t$  について解く。

(3-36) 式を(3-7)式に代入すると、

$$\frac{(A_0 t + B_0)^2}{a^2} + \frac{(A_1 t + B_1)^2}{b^2} + \frac{(A_2 t + B_2)^2}{c^2} = 1 \quad (3-37)$$

となる。この式を展開して  $t$  についてまとめると、

$$a't^2 + 2b't + c' = 0 \quad (3-38)$$



$$\begin{cases} a' = \frac{A_0^2}{a^2} + \frac{A_1^2}{b^2} + \frac{A_2^2}{c^2} \\ b' = \frac{A_0 B_0}{a^2} + \frac{A_1 B_1}{b^2} + \frac{A_2 B_2}{c^2} \\ c' = \frac{B_0^2}{a^2} + \frac{B_1^2}{b^2} + \frac{B_2^2}{c^2} - 1 \end{cases} \quad (3-39)$$

よって、解は以下の2つとなる。

$$t_0 = \frac{b' - \sqrt{b'^2 - a'c'}}{a'}, \quad t_1 = \frac{b' + \sqrt{b'^2 - a'c'}}{a'} \quad (3-40)$$

④  $t$  の値から楕円体と直線の2つの交点の距離から投影の値を求める。

投影は、 $t$  について解いた2つの解の差に楕円の濃度  $d$  を掛けたものとなる。

$$p'(X, Z, \beta) = d(t_1 - t_0) = \frac{2d\sqrt{b'^2 - a'c'}}{a'} \quad (3-41)$$

プログラムにするときは以下の手順となる。

- (1) 繰り返しを利用して、求めたい投影の1点の位置  $(X, Z, \beta)$  を決める。
- (2)  $D, X, Z, \beta$  の値を用いて (3-32) 式と (3-33) 式から  $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$  の値を求める。
- (3)  $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$  の値を用いて (3-34) 式と (3-35) 式から  $A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, B_2$  の値を求める。
- (4)  $A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, B_2$  の値を用いて (3-39) 式から  $a', b', c'$  の値を求める。
- (5)  $a', b', c'$  の値から判別式  $b'^2 - a'c'$  の値を求める。
- (6) 判別式が正の場合、(3-41) 式を用いて値を求め、対応する投影データに加える。

図3-2に示した3次元数値ファントムを原画像とし、3次元コーンビームの投影データを作成する。2次元検出器を  $256 \times 256$  画素とし、256投影で作成するものとする。サイノグラムのように積み重ねて3次元にした場合のそれぞれ中心を通る軸平面上の3つの2次元画像を図3-7(a) ~ (c)に示す。図3-7(a)は、2次元検出器上の1つの角度における2次元投影データを示している(XZ平面)。図3-7(b)は、2次元検出器の縦方向を中心位置に固定し、横方向(X方向)と角度方向( $\beta$ 方向)との2次元投影データを示している。このデータは2次元のサイノグラムに相当する。図3-7(c)は、2次元検出器の横方向を中心位置に固定し、縦方向(Z方向)と角度方向( $\beta$ 方向)との2次元投影データを示している。

3次元コーンビームの場合も、2次元ファンビームと同様に検出器を原点にずらした仮想の検出器を用いて画像再構成を考える。仮想の検出器にずらす場合の拡大率については、ファンビームと同様に変換する。ただし、2次元検出器の横方向と縦方向の標本間隔は等しいと仮定する。

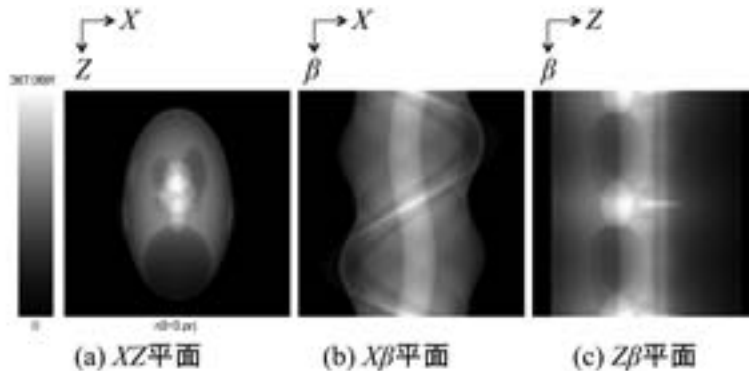


図 3-7 3次元コーンビームの投影データ

座標 (128, 128, 128) を通る断面をそれぞれ表示している。(a) 2次元検出器上の1つの角度方向の2次元投影データ (XZ平面), (b) 2次元検出器の横方向 (X方向) と角度方向 ( $\beta$  方向) との2次元投影データ (2次元のサイングラムに相当する), (c) 2次元検出器の縦方向 (Z方向) と角度方向 ( $\beta$  方向) との2次元投影データ。

## 〔第4節〕 2次元ファンビーム画像再構成法のベクトル表記

3次元コーンビームの画像再構成の準備としてファンビームの直線状の検出器からの直接画像再構成の式を、ベクトル表記を用いて書き直す。単位ベクトル  $i, j$  を図 3-8 の通り決定する。xy 平面における断層像を  $f(r_0)$ ,  $r_0 = (x, y)^T$  とすると ( $T$  は行と列を入れ替える転置を表す),

$$\begin{cases} r_0 \cdot i = X = t \cos(\beta - \phi) \\ r_0 \cdot j = Y = -t \sin(\beta - \phi) \end{cases} \quad (3-42)$$

となる。ベクトル表記を用いない直接再構成の式は,

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{L_2^2} \int_{-X_{\max}}^{X_{\max}} \left\{ \frac{D}{\sqrt{D^2 + X^2}} p'(X, \beta) \right\} h(X' - X) dX d\beta \quad (3-43)$$

$$L_2 = \frac{t \sin(\beta - \phi) + D}{D} \quad (3-44)$$

$$X' = \frac{t \cos(\beta - \phi)}{L_2} \quad (3-45)$$

である。ここに (3-42) 式を利用してベクトル表記を導入すると,

$$f(r_0) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{L_2^2} \int_{-X_{\max}}^{X_{\max}} \left\{ \frac{D}{\sqrt{D^2 + X^2}} p'(X, \beta) \right\} h(X' - X) dX d\beta \quad (3-46)$$

$$L_2 = \frac{D - r_0 \cdot j}{D} \quad (3-47)$$