

〈 第 1 章 〉

画像再構成

〔第 1 節〕 X 線の減弱

線減弱係数 μ^{-1} は単位長さあたり光子の減弱を表す。図 1-1 は吸収体の線減弱係数が位置に依らず一定（一様吸収体）とし、強度 I の光子が長さ Δl の吸収体に入射する様子を示す。吸収体との相互作用（光子の吸収・散乱）による光子の変化量は、入射強度、線減弱係数、吸収体の長さに比例すると考えられるので次式で表される。

$$\Delta I = -I\mu\Delta l \quad (1-1)$$

(1-1) 式は入射光子数が多いほど、線減弱係数が大きいほど、そして吸収体が長いほど、光子が吸収体と相互作用をする機会が増えると予想される式となっている。吸収体の長さが無限小のとき (1-1) 式は

$$dI = -I\mu dl \quad (1-2)$$

となり、変数分離形の積分をし

$$\frac{dI}{I} = -\mu dl \quad (1-3)$$

吸収体がないときの入射強度を I_0 とすると次式が得られる。

$$I = I_0 e^{-\mu l} \quad (1-4)$$

線減弱係数が一定な吸収体について入射強度と透過強度の関係式が得られたので、(1-4) 式を用い図 1-2 のように線減弱係数が一定な 3 つの吸収体を並べたときの透過強度を考える。

1 番目の吸収体は線減弱係数 μ_1 、長さ l_1 からなり (μ_1, l_1) と表す、2 番目の吸収体は線減弱係数 μ_2 、長さ l_2 の (μ_2, l_2) 、3 番目の吸収体は線減弱係数 μ_3 、長さ l_3 の (μ_3, l_3) と表す。1 番目の吸収体を透過する光子数は

$$I_1 = I_0 e^{-\mu_1 l_1}$$

となる。2 番目の吸収体については 1 番目の吸収体を透過した光子が入射強度となるので、透過強度は次式で与えられる。

$$I_2 = I_1 e^{-\mu_2 l_2} = I_0 e^{-(\mu_1 l_1 + \mu_2 l_2)}$$

3 番目の吸収体については 2 番目の吸収体を透過した光子が入射強度となるので、透過強度は次式で与えられる。

$$I_3 = I_2 e^{-\mu_3 l_3} = I_0 e^{-(\mu_1 l_1 + \mu_2 l_2 + \mu_3 l_3)}$$

次に図 1-3 のように線減弱係数が位置に依存し変化する不均一吸収体に対し、光子が入射した場合の透過強度について考える。吸収体を小区間に分割する。区間内でも線減弱係数は変化するが、各区間の中央の位置における線減弱係数で代表する。区間の幅 (Δl) が 1 cm のとき 1 番目の区間の線減弱係数

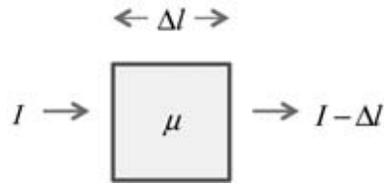


図 1-1 光子の減弱

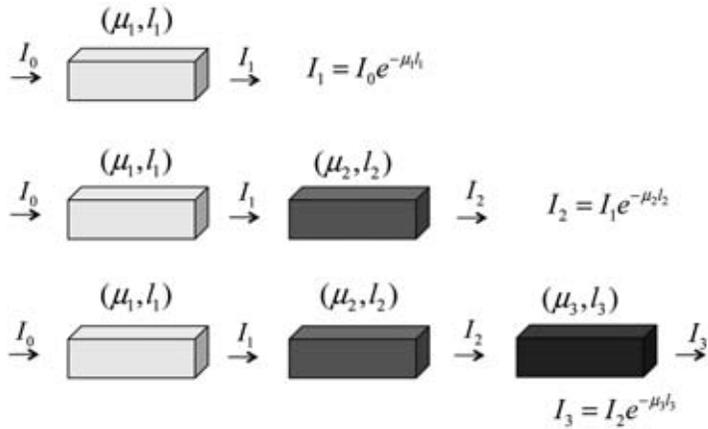


図 1-2 3つの吸収体による光子の減弱

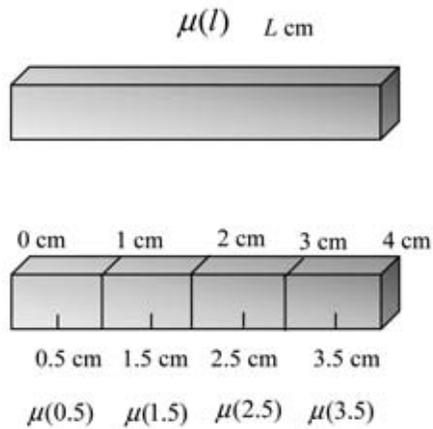


図 1-3 線減弱係数が位置に依存して変化する吸収体

は 0.5 cm における線減弱係数 $\mu(0.5)$, 2 番目の区間では 1.5 cm における $\mu(1.5)$, 3 番目の区間では 2.5 cm における $\mu(2.5)$, 4 番目の区間では 3.5 cm における線減弱係数 $\mu(3.5)$ であるとする. 長さ 4 cm の吸収体を透過する光子数 I_4 は

$$I_4 = I_0 e^{-\{\mu(0.5) + \mu(1.5) + \mu(2.5) + \mu(3.5)\}}$$

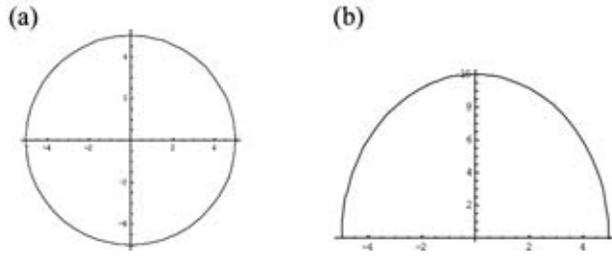


図 1-4 円内の領域で線減弱係数が一定な画像（円画像）(a) と投影 (b)

となる．以上から長さ L の吸収体を n 分割した場合には次式で表される．

$$I = I_0 e^{-\sum_{m=1}^n \mu_m l_m} \quad (1-5)$$

分割数を多くしていくと各小区間内では線減弱係数を一定とみなせるので和が積分となり，不均一吸収体の透過強度は次式で表される．

$$I = I_0 e^{-\int_0^L \mu(l) dl} \quad (1-6)$$

図 1-4 のように円内の線減弱係数が一定値 μ を持つ吸収体（原画像）は

$$f(x, y) = \begin{cases} \mu & x^2 + y^2 \leq a^2 \\ 0 & x^2 + y^2 > a^2 \end{cases} \quad (1-7)$$

で表される．この吸収体に対し y 軸に平行な直線に沿って強度 I_0 の X 線を照射した場合の透過強度 I は

$$I(x) = I_0 e^{-\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy} \quad (1-8)$$

である． $x = x_1$ のときの積分範囲は円の方程式から

$$x_1^2 + y^2 = a^2, \quad y = \pm \sqrt{a^2 - x_1^2}$$

となる．すると $x = x_1$ のときの透過強度はこの直線上で一定な線減弱係数を持つ長さ

$$2\sqrt{a^2 - x_1^2}$$

の吸収体における X 線の減弱と等価である．

$$I(x_1) = I_0 e^{-2\mu\sqrt{a^2 - x_1^2}}$$

投影データは

$$\ln\left(\frac{I_0}{I(x_1)}\right) = 2\mu\sqrt{a^2 - x_1^2} \quad (1-9)$$

この吸収体に対し x 軸に平行な直線に沿って強度 I_0 の X 線を照射した場合の透過強度 I は

$$I(y) = I_0 e^{-\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx}$$

である．ここで線減弱係数の積分は

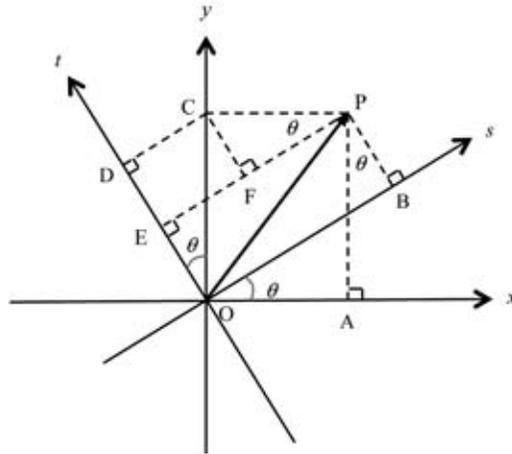


図 1-5 固定座標系 (x, y) と回転座標系 (s, t)
 (s, t) 座標系は原点 O の回りに θ だけ半時計回りに回転。

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} \mu dx = \mu [x]_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} = 2\mu\sqrt{a^2-y^2}$$

となるから透過強度は

$$I(y) = I_0 e^{-2\mu\sqrt{a^2-y^2}}$$

となり、投影データは次式で表される。

$$\ln\left(\frac{I_0}{I(y)}\right) = 2\mu\sqrt{a^2-y^2}$$

〔第 2 節〕 ラドン変換

固定座標系 (x, y) とそれに対し半時計回りに回転した回転座標系 (s, t) の関係は次式で表される (図 1-5)。

$$s = x \cos \theta + y \sin \theta$$

$$t = -x \sin \theta + y \cos \theta \tag{1-10}$$

固定座標は回転座標を用い次式で表される。

$$x = s \cos \theta - t \sin \theta$$

$$y = s \sin \theta + t \cos \theta \tag{1-11}$$

図 1-6 のように 2 次元関数 $f(x, y)$ を直線 L 上で積分することを線積分という。図 1-7 の s は x 軸と θ の傾きをなしており、原点から直線 L に下ろした垂線の距離である。 s に平行な直線を検出器の並びとし、線積分の値が s 上に測定される様子を示している。線積分を用いラドン変換 $R\{f(x, y)\}$ は次式で表される¹⁾。

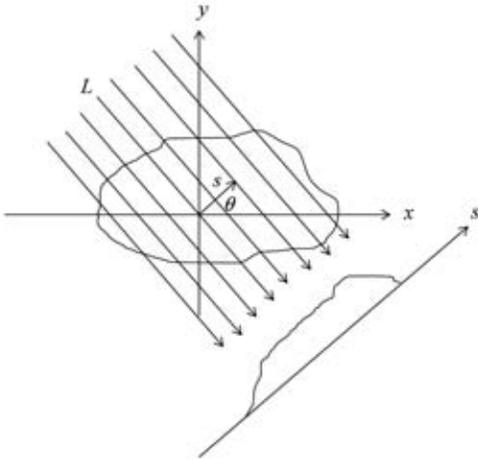


図 1-6 線積分で表される 2次元ラドン変換

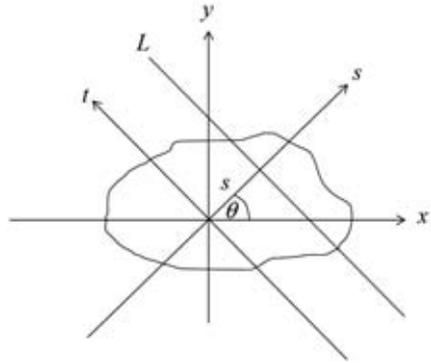


図 1-7 直線上の積分経路

$$\begin{aligned}
 p(s, \theta) &= R \{f(x, y)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(s \cos \theta - t \sin \theta, s \sin \theta + t \cos \theta) dt
 \end{aligned} \tag{1-12}$$

(1-12) 式は (x, y) を (1-11) 式で置き換えている。デルタ関数を用いた表記ではラドン変換は

$$p(s, \theta) = R \{f(x, y)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - s) dx dy \tag{1-13}$$

となる。簡便のためラドン変換を以下のように書くことにする。

$$f(x, y) \xrightarrow{R} p(s, \theta) \tag{1-14}$$

図 1-7 の回転座標系を用いると CT のラドン変換は s 座標を変えながらそれに垂直な t 軸に平行な直線上で線減弱係数を線積分する。円の透過強度とラドン変換はそれぞれ以下の式で表される。

$$I(s, \theta) = I_0 e^{-\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dt} \tag{1-15}$$

$$p(s, \theta) = \ln \left(\frac{I_0}{I(s, \theta)} \right) = 2\mu \sqrt{a^2 - s^2} \tag{1-16}$$

なお、本書ではラドン変換を投影とっている。

図 1-8 の矩形領域内では線減弱係数が一定で矩形外ではゼロの原画像は次式で表される。

$$f(x, y) = \begin{cases} A & |x| \leq a, |y| \leq a \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{1-17}$$

ここで 1 行の条件式のカンマ (,) はかつ (and) を、2 行の otherwise はそれ以外を示すことにする。

矩形領域内で強度が一定値 A の 2次元関数の投影は 4つの頂点の座標を回転座標系から見ることによって求めることができる。投影は検出器の座標を示す s を固定し t 軸に平行な直線上で $f(x, y)$ を線積分する。1つの s について線積分が終了したら、 s を Δs だけ移動し同様に線積分を繰り返すと s を変数にした投影が得られる。(1-17) 式は偶関数なので投影を作成するには図 1-10-1 の片側の b, c の座標(あるいは $-b, -c$ の座標)と高さ d がわかればよい。

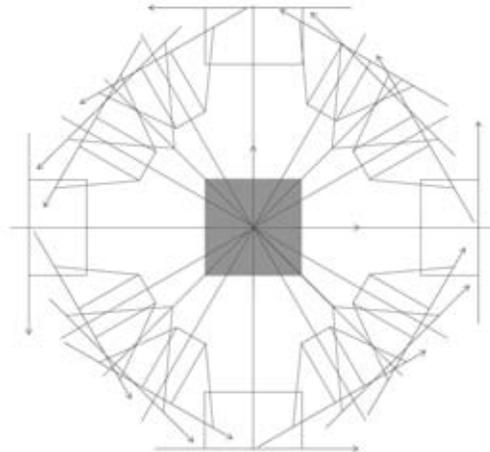


図 1-8 矩形領域内で線減弱係数が一定な画像（矩形画像）の投影

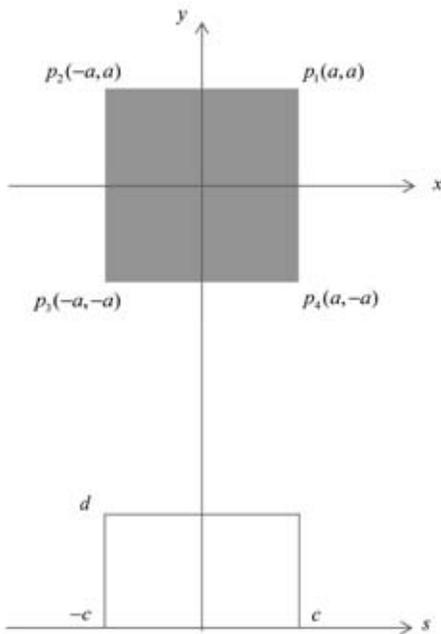


図 1-9-1 矩形画像の 0° 方向の投影

矩形画像の投影は一般に台形となるので、その強度分布は台形の底辺を決める s 軸上の座標 b, c ($b < c$) あるいは $(-b, -c)$ の座標と高さ d がわかればよい。 0° 方向の投影は台形の特別な場合で $b = c$ の矩形の強度分布となる。

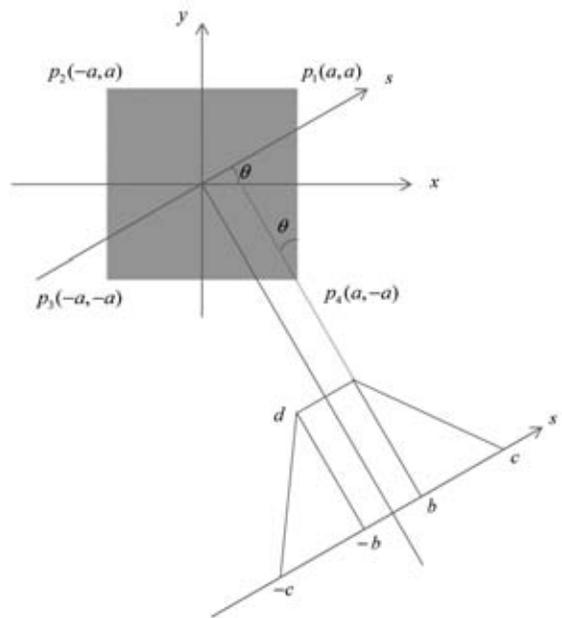


図 1-9-2 矩形画像の $\theta = 30^\circ$ の投影

1) 図 1-9-1 の $\theta = 0^\circ$ の投影角では s 軸が x 軸と平行となり、 s 軸上の b と c の座標は一致する。 b は p_1 を回転座標系から見ることに、また、 $-b$ の座標は p_2 を回転座標系から見ることで決まる。(1-10) 式の s 座標を b あるいは c と置いて

$$b = c = a \cos \theta + a \sin \theta, \quad -b = -c = -a \cos \theta + a \sin \theta, \quad d = 2aA \quad (1-18)$$

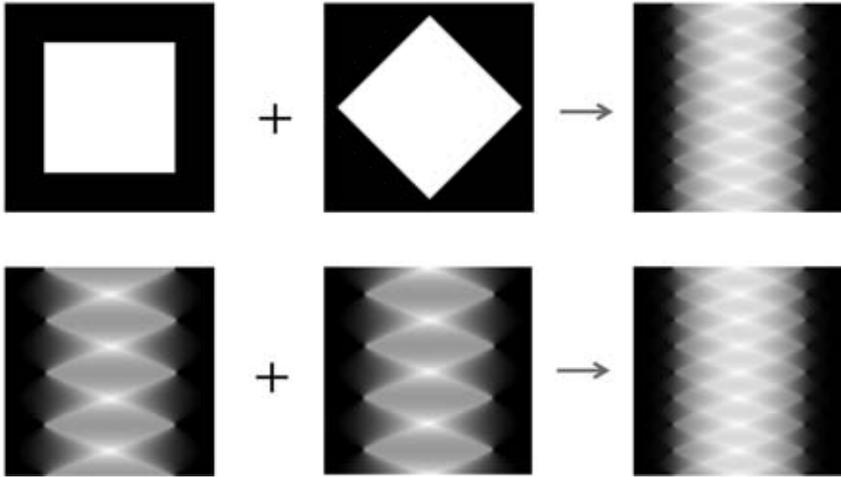


図 1-10 ラドン変換の線形性

2) 図 1-9-2 の $\theta = 30^\circ$ では s 軸上の b の座標は p_4 を回転座標系から見ることに、また、 c の座標は p_1 から、 $-b$ 、 $-c$ の座標は p_2 、 p_3 から得られる。

$$b = a \cos \theta - a \sin \theta, \quad c = a \cos \theta + a \sin \theta, \quad d = 2aA / \cos \theta$$

$$-b = -a \cos \theta + a \sin \theta, \quad -c = -a \cos \theta - a \sin \theta, \tag{1-19}$$

ラドン変換には以下の性質がある¹⁾。

(1) 線形性

$$af_1(x, y) + bf_2(x, y) \xrightarrow{R} ap_1(s, \theta) + bp_2(s, \theta) \tag{1-20}$$

図 1-10 には合計 6 つの画像があるが、本書ではそれらを行列のように並んでいるものとみなし、左上の画像は 1 行 1 列、右上の画像は 1 行 3 列、左下の画像は 2 行 1 列、右下の画像は 2 行 3 列ということにする。1 行は 2 つの画像を足し算したラドン変換を示す。2 行はそれぞれのラドン変換を足し算したラドン変換を示す。両者のラドン変換は等しい。

(2) 対称性

$$p(s, \theta) = p(-s, \theta + \pi) \tag{1-21}$$

図 1-11 は点線源のラドン変換を 0° から 360° まで収集する様子を示す。対向する位置のラドン変換は等しい。

(3) 周期性

$$p(s, \theta) = p(s, \theta + 2n\pi) \tag{1-22}$$

図 1-12 は $n = 1$ の場合についてラドン変換の周期性を示す。

(4) スケーリング

$$f(ax, ay) \xrightarrow{R} \frac{1}{|a|} p(as, \theta) \tag{1-23}$$