

第3章

3

逐次近似画像再構成法の実習

〔第1節〕 はじめに

本章も前章に引き続き、Excelで作成したファイルをもとに画像再構成の原理を追っていく。この章で紹介する画像再構成法は逐次近似法のひとつである最尤推定・期待値最大化（maximum likelihood-expectation maximization：ML-EM）法である。

前章の冒頭でも触れたが、画像再構成法とはある断面の線積分で得られた結果（投影）から原因（断面像）を解く逆問題の解法で、最も簡単な方法は連立方程式を立てて解く方法である。しかし、直接的に解を求めることが困難であるため、解析的画像再構成では投影切断面定理を利用し解（再構成画像）を得た。逐次近似法は解析的方法に比較し、直接法により近い方法で解を得る。逐次近似法は代数的方法と統計的方法に大きく分けられる。

代数的方法は直接的に解くことができない連立方程式を解くために、先にある解（断面像）を仮定しその断面像を線積分することで投影を得、実際の投影との間で比較、比較した結果を逆投影し仮定した解を修正、この修正を繰り返し行うことで真の解（原画像）に近づけていく方法である。このように逐次、解の近似をさせていることから逐次近似法と呼ばれる。

統計的方法も逐次近似法であることから、繰り返し計算によって解を修正していくところは代数的方法とまったく同じである。違うところは最初の仮定の部分である。代数的方法は原画像と投影との関係を直接的なものとし、連立方程式を繰り返し計算で解いている。しかし、計測データには統計誤差が伴う。この誤差を考慮に入れ画像の期待値を求めるのが統計的方法である。ML-EM法はこの統計的方法に属する。人体を被写体とした撮像では、放射線被ばくの関係から投与する放射性薬剤の量（放射能）の制限や、撮像する時間の制限がある。そのような制限のもとで得られたデータは誤差が大きい。このようなデータに対し統計的方法は有効であり、SPECT・PETなど特に計測データの誤差が大きい検査に用いられている。

解析的方法は1回の逆投影で再構成画像が得られるが、逐次近似法は順投影と逆投影を繰り返し行うため計算時間が非常に長くなる欠点をもつ。ML-EM法も計算時間が長い実際の検査では使用されなかった。しかし、近年のコンピュータの高速化と、ML-EM法を高速化したOS-EM（ordered subset-expectation maximization）法の登場によってSPECT・PETの核医学分野で多用されるようになった。

この章で用いるExcelファイルは「逐次近似画像再構成.xls」である。前章と同様、任意に設定できる原画像（断面像）から投影を作成し、その投影からML-EM法によって再構成画像を作成していくことにする。

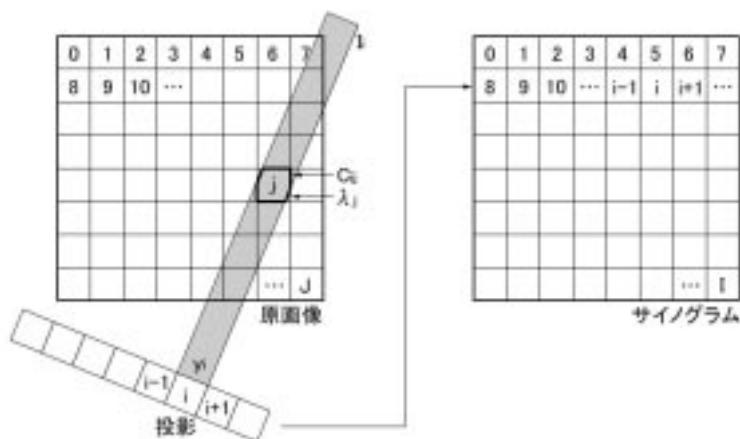


図3-1 ML-EM法で用いる記号

〔第2節〕 逐次近似画像再構成法で用いる記号

解析的画像再構成では画像の中心を原点とする関数で画像を表し、実際の計算時に離散的に扱ってきた。しかし、逐次近似画像再構成では画像を配列（行列）として扱う。そのため、被写体の構成も画素ごとに分かれて存在すると見なす。画像を配列として定義した場合、実際の計算において数式を容易に組み立てられる利点がある。

ML-EM法で用いる記号を図3-1に示す。原画像では左上端の画素から右下端の画素にかけて通し番号を付け j で表す（範囲は $0-J$ ）。同様にサイノグラムについても通し番号を付け i で表す（範囲は $0-I$ ）。投影の計測は光子の散乱、減弱、コリメータの幾何学的分解能などによって影響を受けるが、本書ではそれらの影響がない理想状態を仮定している。SPECT・PET検査において投与した薬剤のある画素における放射能（放射能濃度）を λ_j とする。画素 j から放出された光子が検出器 i に入射する数を x_{ij} とする。光子数 x_{ij} は、放射能 λ_j と画素 j から放出された全光子のうち検出器 i に入射する割合（検出確率） C_{ij} によって決まる。しかし、光子の放出は時間的にランダムな事象であり、放出数には誤差がある。検出器に入射する光子の数が x_{ij} となる確率は、 $C_{ij} \lambda_j$ を期待値とするポアソン分布に従うことが知られている。そのような確率分布のもと、 x_{ij} 個の光子が検出器 i に入射する。検出器 i には投影線 I_i 上の画素からの光子が入射し、それらの総和が検出器 i における投影 y_i となる。そして、 y_i となる確率もポアソン分布に従う。以上の定義や記号を用いるとML-EM法は次式で表される。

$$\lambda_j^{k+1} = \frac{\lambda_j^k}{\sum_i C_{ij}} \sum_i \frac{y_i C_{ij}}{\sum_{m \in I_i} C_{im} \lambda_m^k} \tag{3-1}$$

ここで、 k は繰り返し回数を示す。この数式は繰り返し回数が k 回の λ_j^k から $k+1$ 回目の更新値 λ_j^{k+1} を求めている。 λ_j^0 の初期値 λ_j^0 は正の数であればどのような値でもかまわない（画像更新を進めるうちに初期値は無視できるようになる）。一般式の導出や数式の詳細に関しては第1章を参照されたい。

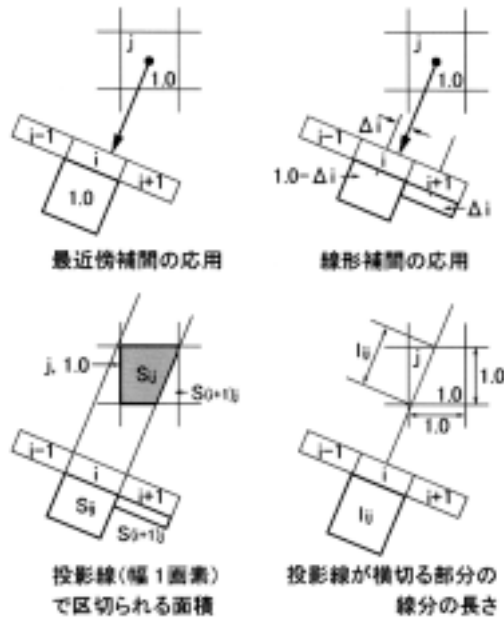


図3-2 検出確率の算出法

〔第3節〕 検出確率の計算

(1) 検出確率とは

(3-1) 式で表される ML-EM 法で、最も重要な働きをするのが検出確率 C_{ij} である。この検出確率は画素から放出された光子が検出器 i に入射する確率を示し、 i と j を行と列とし、検出確率 C_{ij} を各成分に入れた行列として示される。この行列にはさまざまな物理的要素（入射する光子の人体による散乱、減弱、装置の分解能など）を組み込むことが可能であり、物理的作用によって劣化した画像の補正を行いながら画像再構成を行える。

ここでは、物理的作用による画像劣化は無視し画像再構成のみに注目を置くことにする。物理的作用を無視した場合、人体中の放射性薬剤から放出される光子が、ある検出器に入射する確率は幾何学的に決められる。光子は放射性薬剤からあらゆる方向（4 方向）に飛び出してくる。このうちある検出器に入射する光子はその検出器の方向に向かったもののみであり、この関係から検出確率が決定される。ここで、再び (3-1) 式に注目する。式中の C_{ij} は検出確率の総和であり、これで割ることで規格化を行っている。このことから検出確率は厳密に確率にする必要はなく、それに比例した値であれば規格化されるので問題ない。一般的には原画像の各画素と検出器との関係から検出確率を算出する。いくつかの算出例を図3-2に示す。原画像の各画素の値を 1.0 とし、ある画素 j からの投影を図3-2で示すような方法で作成、検出器 i に入射する値を算出する。この値を検出確率 C_{ij} とする。

図3-2上段左の最近傍補間は第2章の投影の作成で用いたものと同じ方法で、画素の中心が検出器のどの位置に入射するかを先に算出する。検出器の中心で整数値をとるとすると、小数点以下の値が 0.5 より小さい場合には手前の検出器に、0.5 以上になると隣の検出器に入射することになる。これを四捨五入で表す。なお、本書では、検出器の位置番号は投影の番号と同じとしている。したがって投影 i は検出器 i における投影を意味する。入射した検出器の検出確率を 1.0 とし、それ以外の検出器については 0 とする。(3-1) 式の画像再構成では、この検出確率と原画像を掛け算し投影を作成しているため、

ある画素 j (画素の値 j) が検出器に入射する確率は1か0のどちらかしかとらないことになる。また、確率が1となる検出器には画素の値 j がそのまま投影に加算される。この方法は最も簡便な方法であるが、四捨五入をしてしまうため、投影位置のずれが大きい欠点を有する。この問題を解決する方法として、線形補間を応用した方法がある (図3-2上段右)。線形補間は求めたい位置における画素の値を隣接する2画素の重み付け加算によって算出する方法であるが、ここではその逆で投影位置から重み付けによって1.0の画素の値を隣接する2検出器に振り分ける作業を行っている。

投影線に注目した方法も存在する。図3-2下段の2方法がその代表的なもので、左は1画素の幅をもつ投影線と注目の画素が交叉する部分の面積を検出確率としたもので、右は検出器の中心から延ばした投影線が画素を横切る際のその線分の長さを検出確率としたものである。線分の長さを使用した場合、1画素の幅である1.0よりも斜めに入射した線分の長さのほうが長い場合があり、検出確率が1.0よりも大きい値をとることもあるが最後に規格化されるため問題にはならない。

SPECT・PET検査では、1画素内に存在する放射能 (放射能濃度) を求めることが目的となる。よって、ここでは実際の撮像に近い図3-2下段左の方法を用いて検出確率を算出することにする。この方法で求めた場合、検出確率 C_{ij} は0から1.0の範囲の値をとる。

(2) 検出確率の計算法

検出確率 C_{ij} の計算に、1画素の幅をもつ投影線と画素が交叉する部分の面積を用いた場合の計算法を示す。投影線と画素が交叉する面積を直接的に求めようとした場合、場合分けの数が多く計算が困難になる。そこで、矩形 (1画素) の投影を利用して面積を求めることにする。画素と交叉する面積を求める際、投影線に平行な奥行き方向について画素を分断することはない。そこで、求めようとしている投影角度について原画像の画素の線積分 (投影) を先に作成し、次元を1つ落としたうえで1画素の検出器の幅に従って投影を分断、分断された個々の投影の総和を求める方法をとる、間接的に容易に交叉する面積を求めることにする。

まず、原画像と投影の位置関係を第2章とは若干異なる形で定義する。第2章では画素の中心で整数をとるとした。画像の大きさは 128×128 や 256×256 , 512×512 のように 2^n で示される大きさを用いた。高速フーリエ変換を用いる際に 2^n が必要条件となる。この条件のもと、画素の中心に整数値がくるように設定すると、画像全体の中心が右下方に若干移動してしまう欠点を有する。この問題を解決するため、ここでは画素の左上端に整数値がくるよう設定し、これをその画素の番号とする (図3-3)。このような場合、画素の中心の位置は画素の番号に0.5を足した値となる。また、ML-EM法では左上端から右下端にかけて通し番号を付けている。このままでは画像の位置関係を知ることが困難であるため、 x 軸方向の成分と y 軸方向の成分に分ける必要がある。各画素の中心の座標 (j_x, j_y) は画像の中心を原点として求めると

$$j_x = \{j - N \text{INT}(j/N)\} - \frac{N}{2} + 0.5$$

$$j_y = \text{INT}(j/N) - \frac{N}{2} + 0.5 \quad (3-2)$$

で表される。ここで、 j は画素の番号、 N は画像1辺の画素の数を示す。INT(j/N) で何行目かがわかる。列番号は1行を構成する画素の数 (正方形の画像を対象としているので N) と j を N で割った商との積をとり、 j から差し引くことで求める。取得した行、列番号から画像の中心が0となるように $N/2$ を差し引き、さらに画素の中心までの移動量0.5を足すことで各画素の中心の座標 (j_x, j_y) が得られる。

最初の作業として、画素の値が1.0の1画素の投影を行う。1画素の中心を原点とし、そこからある角

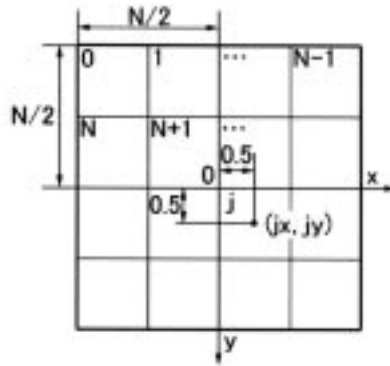


図3-3 座標の定義

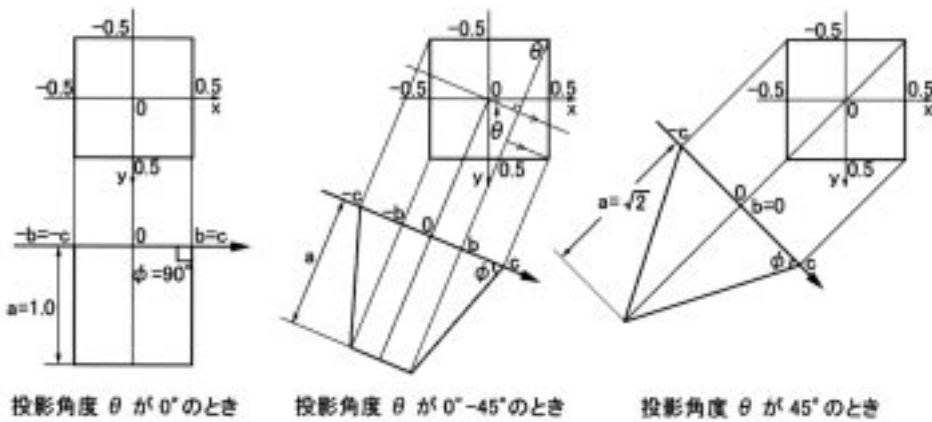


図3-4 1画素の投影とその形状パラメータ

度方向についての投影を作成する．まず，投影角度が0度から45度の範囲について考える．0度のときには図3-4左のように矩形となる．また，45度のときには，図3-4右のように三角形となる．それ以外の角度では台形となる．ここで，これらの形状を特徴づけるパラメータをいくつか設定する．画素の中心を通り，検出器の中心に向け延びる直線と画素が交差する部分の幅を a とする． a は画素の中心を通る部分の線積分に相当する．また，画素の角を形成する点のうち投影位置が原点に近いほうを b とし，外側を c とする．さらに，台形の裾の角度を ϕ とする．このとき，次式の関係がある．

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{1}{\cos \theta} \\
 b &= \frac{1 - \tan \theta}{2} \cos \theta \\
 c &= b + \sin \theta \\
 \tan \phi &= \frac{a}{c - b}
 \end{aligned} \tag{3-3}$$

これらの関係はすべて三角形の辺の長さや角度から算出している．図3-4を参考に確認していただきたい．さらに投影側からもう1つパラメータを設定する．台形を2個の三角形と長方形の組み合わせとし

て考える．三角形の面積を事前に求め S_0 とすれば

$$S_0 = \frac{(c-b)a}{2} \quad (3-4)$$

である．次に，投影角度が45度から90度の範囲について考える．画素の中心を通る投影線が横切る画素の辺が，横方向の辺から縦方向の辺へと変化している．このため(3-3)式では算出ができず，式を変形する必要がある．(3-3)式と同様に45度から90度の範囲について次式の関係がある．

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{\sin \theta} \\ b &= \frac{1 - \frac{1}{\tan \theta}}{2} \sin \theta \\ c &= b + \cos \theta \\ \tan \phi &= \frac{a}{c-b} \end{aligned} \quad (3-5)$$

90度から180度の範囲については角度 θ から90度を引いたものと同様の振る舞いをすることから， $\theta - 90$ 度を θ と読み替えて計算する．

次に実際の画像上での画素の中心と投影の位置関係を求める．画像を構成する各画素のある角度方向の投影は，どの画素からのものも先に求めた1画素の投影とまったく同じ形状を示す．異なる部分はその投影が作成される検出器の位置のみである．この位置がどこにあるかを画素の中心と投影の関係から求める(図3-5)．画素の番号 j からその画素の中心の座標 (j_x, j_y) は(3-2)式で表される．この座標を用いると投影の位置 s は

$$\begin{aligned} s &= (j_x \cos \theta + j_y \sin \theta) + \frac{N}{2} \\ \Delta s &= s - \text{INT}(s) \end{aligned} \quad (3-6)$$

で表される．ここで， Δs は位置 s の小数点以下の値を示す．また，位置 s は中心ではなく左端を0としている．

最後に各検出器への分割，振り分けを行う．1画素の投影が最も幅広く分布するときは45度のときで，その幅は2である．この場合，投影は投影の中心が存在する検出器とそれに隣接する2検出器の合計3検出器に限定され，それ以上の範囲に影響を及ぼさない．よって，投影の中心を含む検出器を中央とした3検出器のみに焦点を絞り計算する．計算は検出器ごとに分け，さらに複数の場合分けを用いて行う．まず，投影の中心が存在する検出器 i よりも1だけ小さい $i-1$ について考える．図3-6上段からもわかるように，投影は $i-1$ に入るとは限らない．この判定に(3-3)式で求めた投影の端と(3-6)式の s を利用する．投影の端 c が検出器 $i-1$ に入らないとき，つまり，投影の中心からの投影の端 c よりも，投影の中心から検出器 $i-1$ の端の大きさ s が大きいとき，投影は $i-1$ には入らず $C_{(i-1)j}$ は0となる．次に投影の端 c が検出器 $i-1$ に入るときを考えると， b が検出器 $i-1$ に入るかどうかで場合分けされる． b が検出器 $i-1$ に入らないとき，投影の裾の部分のみが含まれるから三角形の面積を算出すれば $C_{(i-1)j}$ が求められる．また， b が検出器 $i-1$ に入るとき，投影の裾全体と長方形の一部が含まれることから，裾の三角形全体の面積 S_0 と長方形の一部の面積の和となる．これらは次式で表される．

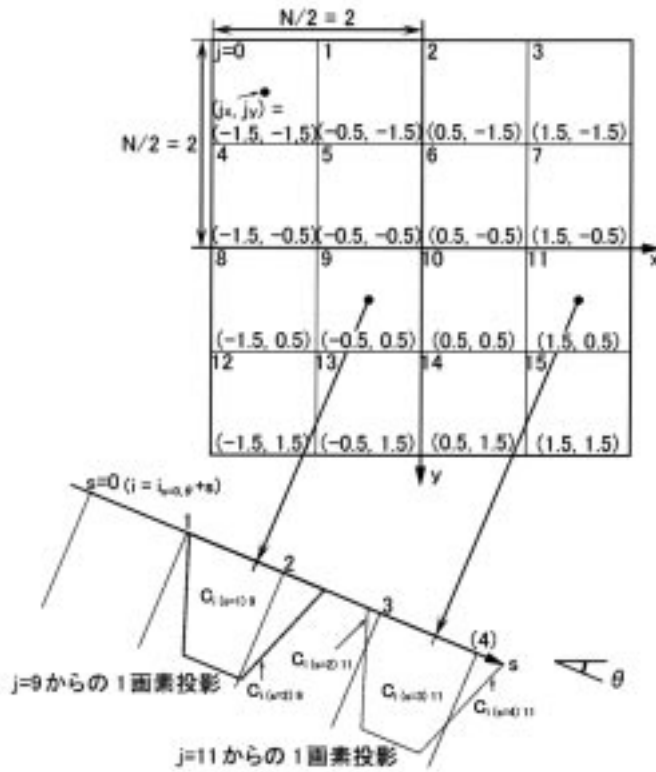


図3-5 1画素の投影の配置

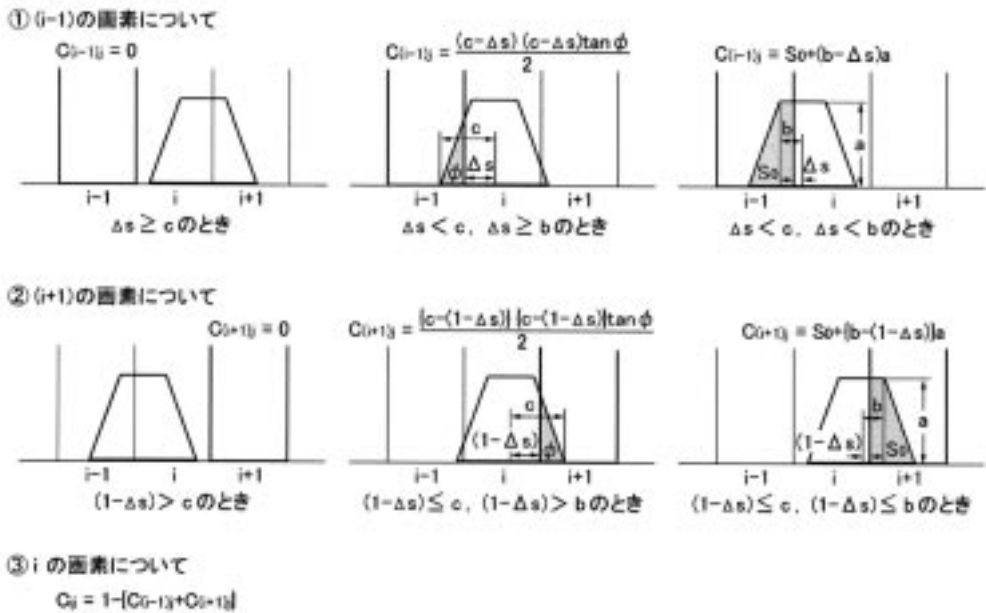


図3-6 検出器に入射する投影(線積分)の割り振り

$$\begin{aligned}
\Delta s \geq c \text{ のとき} & \quad C_{(i-1)j} = 0 \\
\Delta s < c, \Delta s \geq b \text{ のとき} & \quad C_{(i-1)j} = \frac{(c - \Delta s) \cdot (c - \Delta s) \tan \phi}{2} \\
\Delta s < c, \Delta s < b \text{ のとき} & \quad C_{(i-1)j} = S_0 + (b - \Delta s)a
\end{aligned} \tag{3-7}$$

検出器 $i + 1$ のときにも、投影の中心から検出器 $i + 1$ の左端までの距離を $1 - s$ に置き換えることで同様に考えることができる。検出器 $i + 1$ に関しては次式で表される。

$$\begin{aligned}
1 - \Delta s > c \text{ のとき} & \quad C_{(i+1)j} = 0 \\
1 - \Delta s \leq c, 1 - \Delta s > b \text{ のとき} & \quad C_{(i+1)j} = \frac{\{c - (1 - \Delta s)\} \cdot \{c - (1 - \Delta s)\} \tan \phi}{2} \\
1 - \Delta s \leq c, 1 - \Delta s \leq b \text{ のとき} & \quad C_{(i+1)j} = S_0 + \{b - (1 - \Delta s)\}a
\end{aligned} \tag{3-8}$$

C_{ij} は上記の2つの検出確率と投影の総和が1であることから

$$C_{ij} = 1 - \{C_{(i-1)j} + C_{(i+1)j}\} \tag{3-9}$$

で求める。

以上の作業で求めた検出確率を i と j から構成される1つの2次元配列にまとめることで、検出確率 C_{ij} の算出は完了する。

(3) 検出確率の実際の計算

検出確率 C_{ij} の計算は「逐次近似画像再構成.xls」(図3-7a)の「 C_{ij} 算出」ワークシートで行っている。今回使用する C_{ij} の計算は画像のマトリクス数と投影数がわかれば求められるため、再構成演算とは別個に求めている。「 C_{ij} 算出」ワークシートでは検出確率算出のために4つのステップを設けている。これを順に見ていくことにする。図3-7bは図3-7a上段左にある原画像および投影の定義と C_{ij} の部分を示す。図3-7cは図3-7a上段右にある C_{ij} の算出法の部分を示す。

ステップ1 1画素の投影の形状算出(図3-7d)

最初に1画素の投影の形状を(3-3)式から(3-5)式を用い算出し、表にまとめている。表の縦方向は検出器(投影)の番号 i を示す。検出器の番号は、ワークシート内左上の枠に示してあるとおり通し番号であるため、同一角度方向のものが4つ並んでいる。検出器の番号 i から投影角度を算出するには、撮像の角度ステップ $\Delta\theta$ と投影を構成する画素数 s_i がわかればよく

$$\theta_i = \text{INT}\left(\frac{i}{s_i}\right) \cdot \Delta\theta \tag{3-10}$$

で求められる。

ここで用いているワークシートは第2章で用いたものと同様、ワークシートにロックをかけていないため、数式変更が可能である。数式を変更すると今後の演算に影響を及ぼすため変更は不可であるが、ロックをかけていないので数式を見るのは可能である。注目するセルをクリックし数式バーを見るか、セルをダブルクリックすることで見られる。さらに、数式バーでクリックし編集可能とすることで、参照しているセルが色付きの枠で示され、さらにその色に対応して数式の色も変化する。この作業によって数式を追っていただきたい。

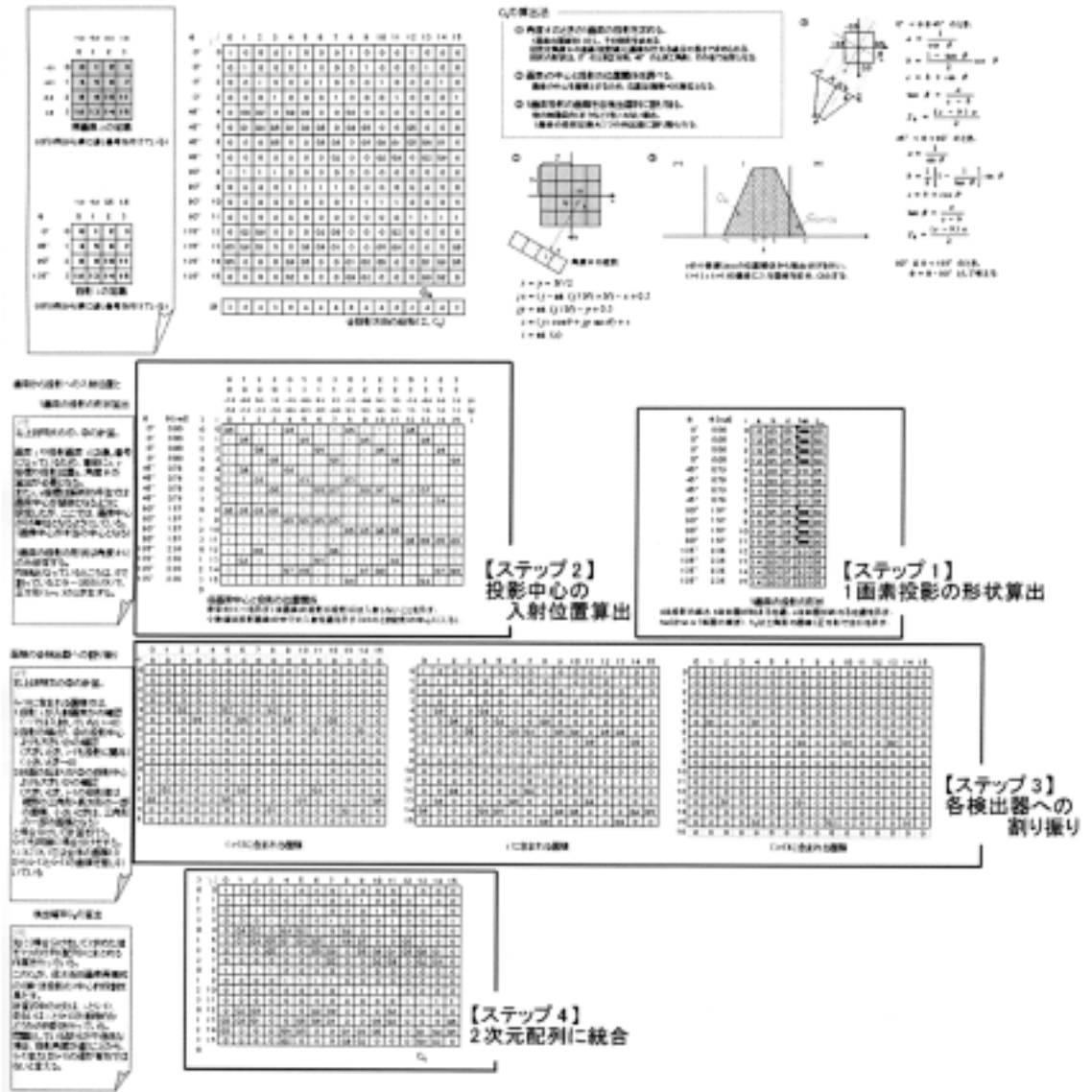


図3-7a 検出率 C_j 算出ワークシート

【ステップ1】は1画素の投影の形状を本文(3-3)式および(3-4)式によって算出している。【ステップ2】は原画像の画素の中心が検出器に入射する位置の算出、【ステップ3】は各検出器に投影を割り振り、【ステップ4】は【ステップ3】の3つの配列を1つの2次元配列に統合し検出確率を得ている。