

第2章 解析的画像再構成法の実習

〔第1節〕 はじめに

本章では、Excelで作成したファイルをもとに、解析的画像再構成の原理を追っていく。使用するExcelファイルは「解析的画像再構成.xls」と「解析的画像再構成（大型版）.xls」である。前者は 8×8 マトリクスの画像を扱っており、後者は 32×32 マトリクスの画像を扱っている。後者は前者の大型版ともいるべきものである。数式や処理法を追っていく際には前者の小型版を使用し、画像がどのように変化していくのかを見る際には大型版を使用する。両者のファイルは画面の解像度が 1024×768 の環境下で作成したため、他の解像度では見にくい部分などあるかもしれないがご了承いただきたい。

Excelファイルは複数のワークシートから構成されており、各ワークシートは下方のシート見出しをクリックすることで切り替えられる。本章では小型版（「解析的画像再構成.xls」）のシート見出しごとに節に分け順に説明していく。左端のシート見出しは「はじめに」となっており、この章に対応している。まずは、「はじめに」ワークシート内に記されている注意事項をご一読いただきたい。

X線CTやMRI、SPECT・PETなどの断層撮影装置は直接的には断面像を得ることができない。得られるデータは、X線CTであれば、X線管から照射されたX線がその経路で受けた減弱後の透過X線量であり、SPECT・PETであれば、検出器の延長線で示される経路上の放射能の総和に比例した計測値である。いずれもある経路の線減弱係数や放射能の積分値であり、断面像ではない。この積分値をいろいろな角度から計測することで、多数の連立方程式を立てることと同義となり、個々の要素がもつ値（断面像の各画素の値）を算出することが可能となる。直接的には見ることができない断面像を、計測データと数学的の方法を用い再構築することを画像再構成と呼んでいる。

計測データが積分値であることから、多数の連立方程式を立て、それを解くことで断面像が得られると想像するが、実際には膨大なデータであるため計算は非常に困難である。そこで考えられた方法が解析的画像再構成法である。解析的画像再構成法はフーリエ変換のもつ性質を利用した画像再構成法であり、現在でもX線CTなどでよく用いられている一般的な方法である。

本章では、任意に設定できる原画像（断面像）から数学的に計測データを作成し、そのデータから解析的画像再構成法によって再構成画像を作成していくことにする。

〔第2節〕 投影の作成

（1）原画像・投影・サイノグラム

図2-1にSPECTを例にとった撮像とシミュレーションの関係を示す。SPECTは人体に投与した放射性薬剤からの光子を計測することで撮像を行う。放射性薬剤から光子はあらゆる方向に偏りなく放出されるため、計測値と放射性薬剤がもつ放射能との間に比例関係が成立つ。よって、シミュレーシ

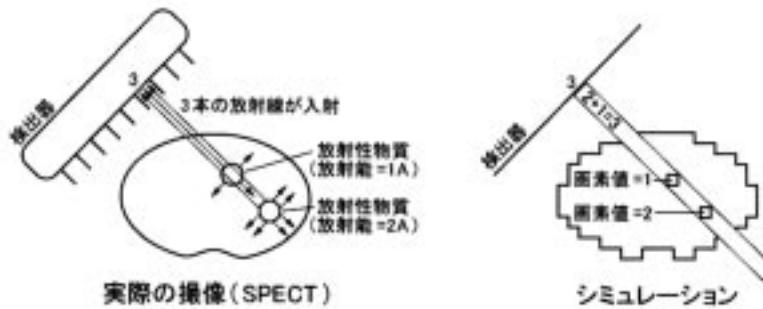


図2-1 実際の撮像 (SPECT) とシミュレーション

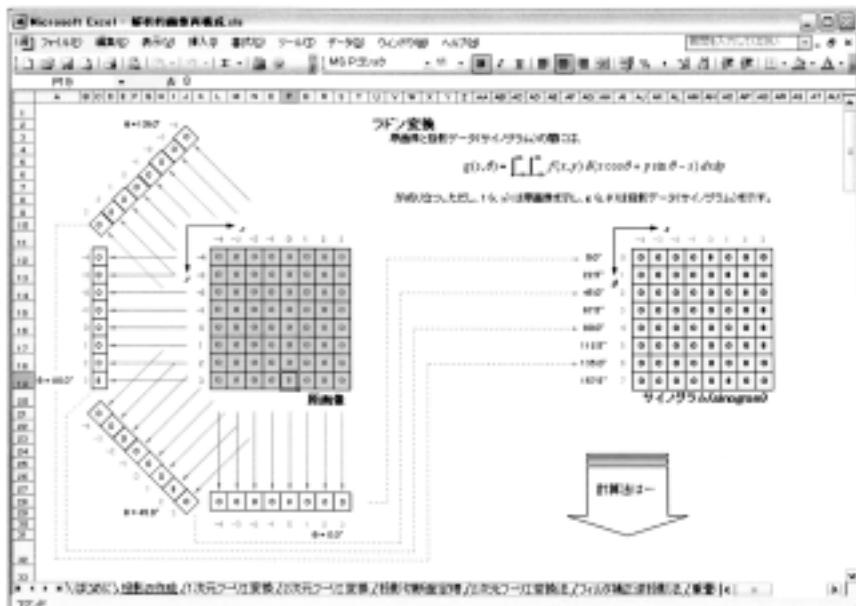


図2-2a 投影の作成画面

プログラムは、1)はじめに、2)投影の作成(ラドン変換)、3)1次元フーリエ変換、4)2次元フーリエ変換、5)投影切断面定理、6)2次元フーリエ変換法、7)フィルタ補正逆投影法、8)重畠積分法、9)付録の各ワークシートから構成されている。図はこれらワークシートのうち、投影の作成画面のワークシートを示す。原画像は 8×8 マトリクスからなり、投影は8個の検出器によって0度から180度の範囲を22.5度間隔で収集する。右のサイノグラムは縦方向に角度、横方向に投影の値をとっている。

図では原画像に放射能(あるいはそれに比例した値)を入力し、積分することで実測の投影と同じ(比例した)ものが得られる。このように、人体の断面上の物理量分布(線減弱係数や放射能の分布)を検出器に向かって直線上で積分することを投影(特に区別する際には順投影)という。2次元の原画像の投影は1次元と次元が1つ小さくなる。

断面像を再構成するには、この投影をいろいろな方向から撮像する必要がある。投影を角度ごとに順に並べたものをサイノグラムという。サイノグラムは横軸に検出器の位置をとり、縦軸に角度をとる。点線源を撮像した場合、サイノグラムはsin関数などの三角関数として表される。

Excelファイル「解析的画像再構成.xls」、「投影の作成」ワークシート内の原画像 $x = 0, y = 3$ (セル【P19】)に任意の値として8を代入した例を図2-2aに示す。図2-2bは原画像、図2-2cはサイノグラムで

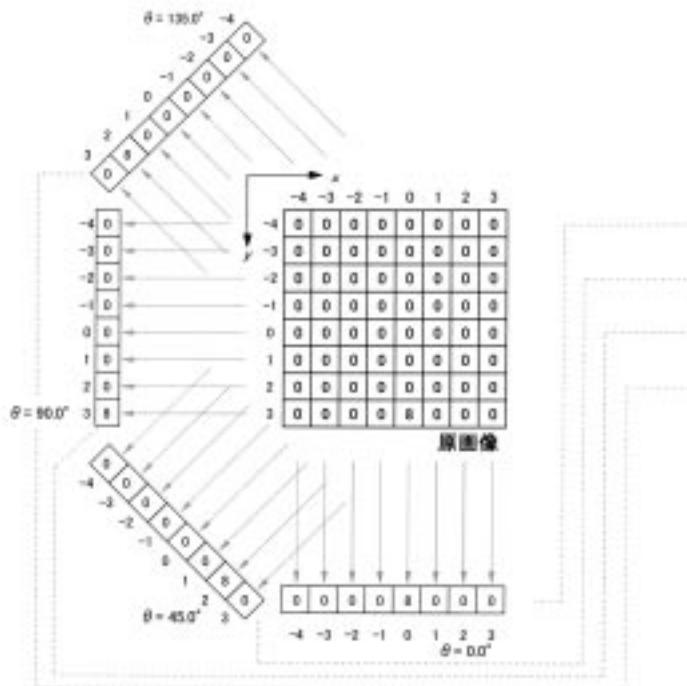


図2-2b 原画像と投影

$x = 0, y = 3$ の画素にのみ値 (8) がある点線源の原画像と45度間隔の4方向の投影を示す。(2-2)式のラドン変換は矢印つき直線上で原画像を線積分することである。原画像の画素の位置と検出器を表す画素の位置が一致しない45度と135度方向の投影は最近傍補間によって計算する。

ある。ここで用いているサイノグラムは0度から180度までの180度収集のものであるため、若干わかりにくいが振幅が3(画像の中心からの距離が3)のsin関数を描いている。「投影の作成」ワークシート内の原画像のみが、このファイルのなかで唯一の変更可能部分である。任意の数値を適当な位置に入力し、投影が投影線上(各検出位置の延長線上)の線積分で表現できること、投影を方向(角度)順で縦に並べることでサイノグラムが構成されていること、ある1点の画素に値を与えたときサイノグラムが三角関数で表されることを確認していただきたい。これらを確認することで、原画像・投影・サイノグラムの関係が掴めると思う。

ラドン変換

原画像と投影(サイノグラム)の関には、

$$g(s, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - s) dx dy$$

が成り立つ。ただし、 $f(x, y)$ は原画像を示し、 $g(s, \theta)$ は投影(サイノグラム)を示す。

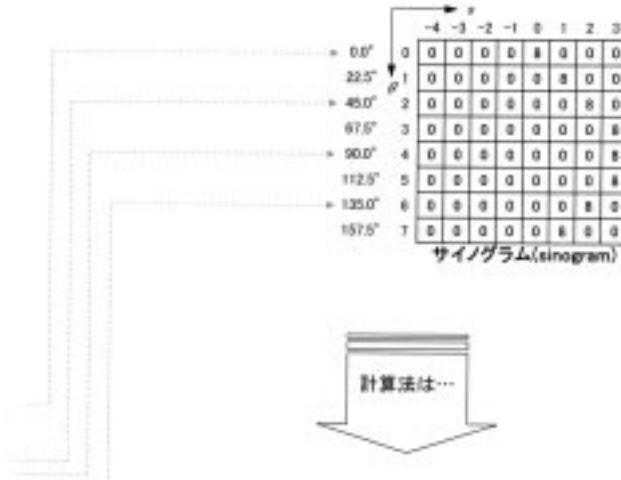


図2-2c 原画像(図2-2b)のサイノグラム

図2-2bの原画像から22.5度間隔で計測した8方向からなるサイノグラムを示す。サイノグラムは縦方向に角度 θ 、横方向に検出器の位置 s をとり各角度で得た投影を2次元画像で表したものである。解析的画像再構成法のうち2次元フーリエ変換法とフィルタ補正逆投影法はサイノグラムを各角度で s について1次元フーリエ変換しその後の処理を行うのに対し、重畠積分法は実空間の s のままフィルタ処理を行う。

(2) ラドン変換

原画像・投影・サイノグラムの関係が掴めたところで実際の算出法に移る。任意の角度方向について原画像と投影の関係を一般式化したものをラドン変換という。原画像を (x, y) 座標系で $f(x, y)$ とし、原点 $(0, 0)$ を中心として角度 θ だけ回転した座標系 (s, t) を設定する。 (x, y) 座標系と (s, t) 座標系の関係は次式で表される。

$$\begin{aligned} s &= x \cos \theta + y \sin \theta \\ t &= -x \sin \theta + y \cos \theta \end{aligned} \quad (2-1)$$

このとき、検出器は s 軸に平行に被写体外に置かれており、撮像時には (s, t) 座標系の回転に伴って被写体の周りを回転する。図2-3で s は検出器の位置を示し、 t は検出器に垂直な経路の位置(深さ)を示す。図2-3の座標系の y 軸は下に向かうほど大きな値となるよう設定されている(通常と y 軸の設定が逆になっている)。これは、画像を配列として扱いやすくするために設定している。配列(行列)は左上端が最小(0行0列)で右下端が最大となる。これに座標系をあてはめたとき、下方に向かうほど大きくなるよう設定したほうが扱いやすいためである。これに伴い回転する方向も反時計回りから時計回りへと変化している。このような定義のもと投影 $g(s, \theta)$ は

$$g(s, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - s) dx dy \quad (2-2)$$

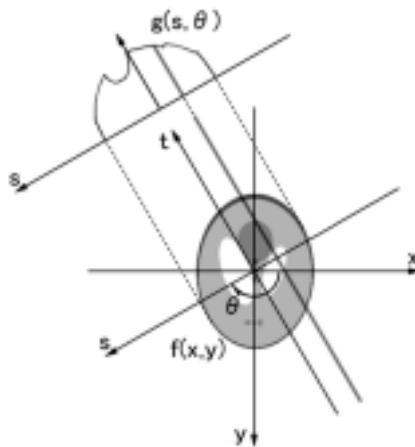


図2-3 原画像を表す固定座標系 (x, y) と投影を表す回転座標系 (s, t)
投影は原画像を t 軸に平行な直線上で線積分したラドン変換で与えられる。 s は投影を計測する検出器の位置を示す。

で表される。この式を用いて原画像から投影に変換することをラドン変換という。

(2-2) 式に (・) で示される関数がある。この関数はデルタ関数で (0) のときのみ積分値 1 を返し、それ以外では積分値が 0 となる性質をもつ。この性質を利用し値の抽出によく用いられる関数である。ここでは、デルタ関数の性質を利用し投影線上の画素の値を抽出している。つまり、原画像を回転座標系に置き換えたときの位置 $s' = x \cos \theta + y \sin \theta$ が、現在求めたい投影位置 s と一致したときのみ画素の値を抽出しそれ以外では 0 とする。これを (x, y) 平面全体について積分することで、任意の角度における線積分を実現させたものである。この操作を求めたい (s, θ) すべてについて行うことでサイノグラムが得られる。

SPECT・PET のような核医学画像では、体内に存在する放射性薬剤の放射能と検出器に入射する光子数が比例関係にあるため、(物理的な画像劣化因子がないと仮定したとき) ラドン変換による理論的な投影と実際の投影との間で違いはない(まったく同じか比例関係にある)。しかし、X 線 CT の場合は照射した X 線の減弱の程度を見ているため、ラドン変換そのもので画像を表現できない。はじめの光子数を I_0 とし、人体との相互作用(減弱)を受けずそのまま透過した光子数を I とすれば次式が成立つ。

$$\frac{I}{I_0} = \exp\left(-\int_{-\infty}^{\infty} \mu(x, y) dt\right) \quad (2-3)$$

ここで、 $\mu(x, y)$ は線減弱係数といい、組織固有の値で X 線と相互作用を起こす確率を示す。X 線 CT は $\mu(x, y)$ を求めることが目的であり、 $\mu(x, y)$ を $f(x, y)$ と置き換えて考えることができる。ここで、(2-3) 式の逆数の対数をとると

$$\begin{aligned} \ln \frac{I_0}{I} &= \int_{-\infty}^{\infty} \mu(x, y) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mu(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - s) dx dy \end{aligned} \quad (2-4)$$

になる。直接的ではないが、撮像データの対数をとる簡単な変換でラドン変換と同義になる。よって、



図2-4 解析的画像再構成法のメニュー画面
投影の作成ワークシートをクリックした状態を示す。

今後はX線CTとSPECT・PETの区別なしに扱う。

(3) Excelでの投影の作成

Excelでどのように投影を作成しているか順を追って見ていくことにする。「解析的画像再構成.xls」「投影の作成」ワークシートの34行以降に計算過程が記述してある。計算式は注目するセルをクリックすると、ワークシート上方の数式バーに表示される。例としてセル【P40】をクリックした場合について図2-4に示す。ダブルクリックをした場合にはそのセル内に計算式が表示される。また、クリックのときには数式バーをクリックし編集可能とすることで計算に関与するセルに色が付き、計算式にもセルの色に対応した色が表示される。ダブルクリックのときにはそのままの状態で同様に色が付く。この方法を用いて計算式を追っていくこととする。このファイルでは、図2-5aのように投影の作成を以下の3ステップに分けて計算している。

ステップ1 原画像と投影の位置関係の計算

はじめに図2-5bのように原画像として強度がすべて1の均一な画像を準備する。図2-5cはこれから説明する手順に従って求めた図2-5bの原画像のサイノグラムである。最初に原画像の各画素と投影の位置関係を計算する。ラドン変換の(2-2)式でデルタ関数内の $x \cos \theta + y \sin \theta$ の計算をここで行う。今回撮像する角度方向は8方向(22.5度ごと)であるため、8通りの計算を行う必要がある。そのため 8×8 の配列を8つ用意している。各投影角度・原画像の各画素別で $x \cos \theta + y \sin \theta$ の計算を行いその結果を出力している。

出力に関しては、光子がどの検出器に入射するかを決定する必要がある。検出器の位置は整数の値しかとることができない(離散化される)。しかし、計算した位置は小数となることが多い。このような問題の対処に補間がある。ここでは最も簡単な補間法である最近傍補間を用いている。最近傍補間は入射位置が小数値となった際、四捨五入してより近いほうの検出器に入射させる方法である。四捨五入の計算にはINT関数を用いる。INT関数は小数点以下を切り捨てるもので四捨五入とは異なる。そこで、計算値に0.5を足しINT関数によって小数点以下を切り捨て四捨五入する。図2-5d上段は $\theta = 0$ 度について、 $s = x \cos \theta + y \sin \theta$ の四捨五入による計算値である。図2-5e上段は $\theta = 22.5, 45$ 度について、 $s = x \cos \theta + y \sin \theta$ の四捨五入による計算値である。

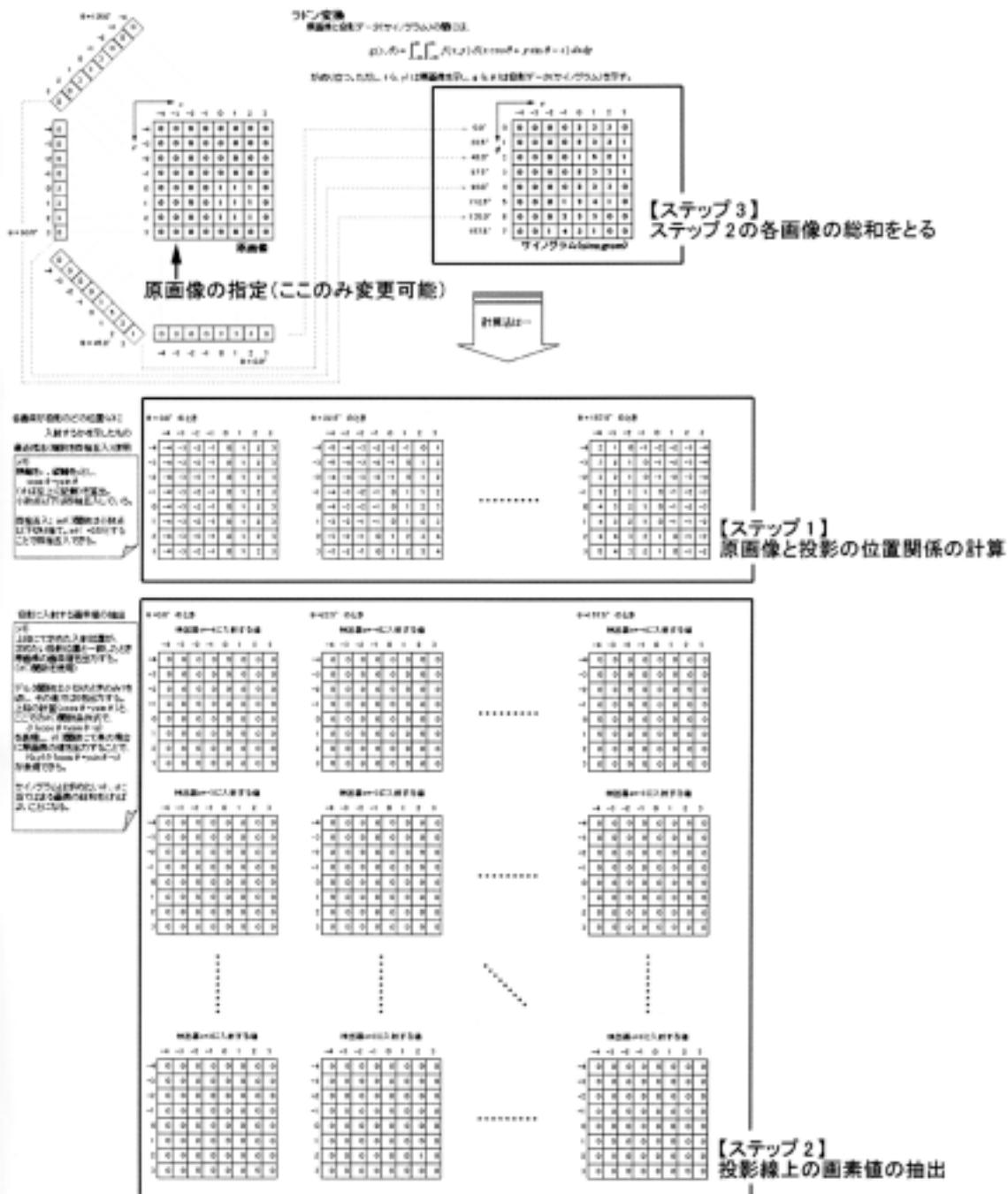


図2-5a 投影の作成ワークシート