〈第1章〉画像再構成

1

X線CT，磁気共鳴イメージング（magnetic resonance imaging：MRI），単光子放射型断層撮影（single photon emission computed tomography：SPECT），陽電子放射型断層撮影（positron emission tomography：PET）などは，体外計測したデータから人体の断面を画像化する技術で今日の画像診断に広く利用されている．画像再構成とは計測データから数学的方法によって断面を復元することであり，X線CTでは線減弱係数分布，MRIでは水素原子数分布，SPECT・PETでは放射能分布を反映した画像が得られる．X線CTは人体にX線を照射し透過後の強度を測定する．MRIはラジオ波を照射し体内水素原子核からの磁化の時間変化を計測する．SPECTは放射性薬剤を体内に静注し，そこから放出される放射線を計測する．PETは^{15}Oなどの陽電子放出核種で標識した水や^{11}C，^{13}N，^{18}Fなどで標識した放射性薬剤を体内に静注し，陽電子が陰電子と結合して消滅する際に180度反対方向に放出される消滅放射線を計測する．本章では，解析的画像再構成法と逐次近似画像再構成法について述べる．

〔第1節〕　解析的方法

(1) 投　影

図1-1において断面の放射能分布（原画像）$f(x, y)$と，計測データである投影$g(s, \theta)$の関係は，次式のラドン変換で表される（便宜上，光子の散乱，減弱，装置の分解能の影響がない理想状態のSPECT・PETを仮定している）．

$$g(s,\theta)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\delta(x\cos\theta+y\sin\theta-s)dxdy \tag{1-1}$$

ここで（x, y）は被写体に固定した静止座標系，（s, t）は被写体の周りを回転する検出器の座標系である．sは中央にある検出器を中心としそこからの位置，tは検出器に垂直な直線上にある被写体の位置を示す．（1-1）式は，原画像のうち回転座標系のsに相当する部分のみをデルタ関数によって抽出し，抽出された値の総和をとることを示す．このことは，角度θ（$0 \leq \theta < \pi$）において位置sに相当する直線（投影線）上で$f(x, y)$を線積分することに相当する．SPECT・PETの場合，断面の放射能分布を点線源の集合として考える．ある程度の時間をかけて撮像した場合，消滅放射線（光子）は点線源から全角度方向に一様に放出されることから，投影は投影線s上で$f(x, y)$の線積分を行う数学的なラドン変換と同一であるといえる．$g(s, \theta)$を横軸s，縦軸θとして2次元画像で示したものがサイノグラムである（**図1-2**上段右）．

(2) 投影切断面定理

画像再構成は投影$g(s, \theta)$から原画像$f(x, y)$を復元するものであり，その数学的関係は投影切断

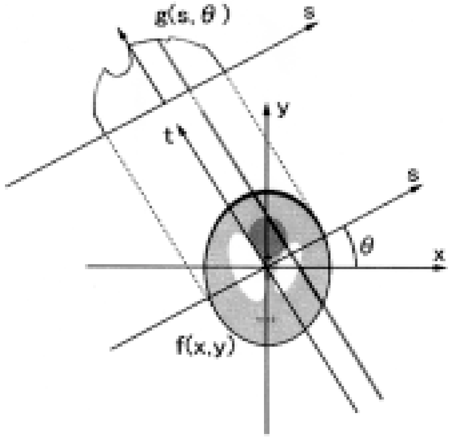

図1-1　原画像を表す固定座標系（x，y）と投影を表す回転座標系（s，t）
投影は原画像をt軸に平行な直線上で線積分したラドン変換で与えられる．sは投影を計測する検出器の位置を表す．

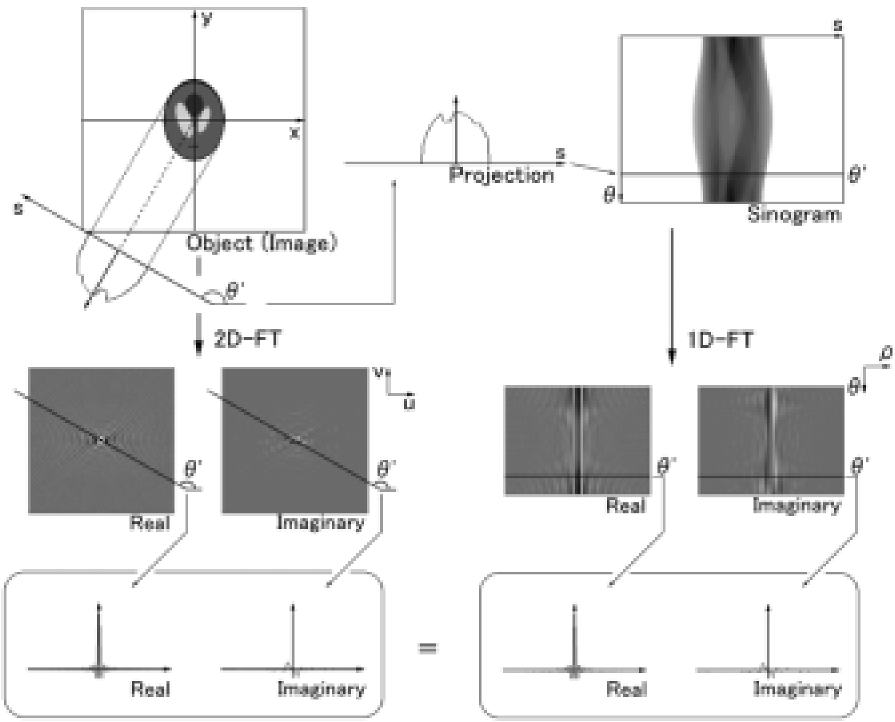

図1-2　原画像の2次元フーリエ変換と投影の1次元フーリエ変換との関係（投影切断面定理）
投影切断面定理によって原画像の2次元フーリエ変換は，投影の1次元フーリエ変換から求められる．

面定理によって与えられる．投影切断面定理は$f(x, y)$の2次元フーリエ変換と$g(s, \theta)$の1次元フーリエ変換の関係を表す．もし，被写体の断面である原画像が既知であれば，その2次元フーリエ変換を求めることは可能である．しかし，原画像はもちろん未知であって，投影から元の断面を復元することが目的である．投影切断面定理は投影の1次元フーリエ変換から原画像の2次元フーリエ変換が得られることを示す．

原画像$f(x, y)$の2次元フーリエ変換$F(u, v)$は

$$F(u,v)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)e^{-i2\pi(ux+vy)}dxdy \tag{1-2}$$

で表される．ここで，$u=\rho\cos\theta$，$v=\rho\sin\theta$として，$F(u, v)$を極座標表示にする．$s=x\cos\theta+y\sin\theta$，$x=s\cos\theta-t\sin\theta$，$y=s\sin\theta+t\cos\theta$であるから

$$\begin{aligned}F(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)e^{-i2\pi\rho(x\cos\theta+y\sin\theta)}dxdy\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(s\cos\theta-t\sin\theta,\ s\sin\theta+t\cos\theta)e^{-i2\pi\rho s}\underbrace{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial s}&\dfrac{\partial x}{\partial t}\\\dfrac{\partial y}{\partial s}&\dfrac{\partial y}{\partial t}\end{vmatrix}}_{\cos^2\theta+\sin^2\theta=1}dsdt\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}f(s\cos\theta-t\sin\theta,\ s\sin\theta+t\cos\theta)dt\right\}e^{-i2\pi\rho s}ds\\&=\int_{-\infty}^{\infty}g(s,\theta)e^{-i2\pi\rho s}ds\\&\equiv G(\rho,\theta)\end{aligned} \tag{1-3}$$

ただし，$G(\rho, \theta)$は投影のs方向についての1次元フーリエ変換を示す．(1-3)式の4行から5行への移行は次式と(1-1)式を用いている．

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(s\cos\theta-t\sin\theta,\ s\sin\theta+t\cos\theta)dt=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\delta(x\cos\theta+y\sin\theta-s)dxdy$$

(1-3)式から原画像の2次元フーリエ変換のある角度成分θは，同じθ方向の投影の1次元フーリエ変換に等しいことがわかる（**図1-2**）．これが，投影切断面定理である．

(3) 2次元フーリエ変換法

2次元フーリエ変換法は(1-3)式を直接利用した画像再構成法であり，投影の1次元フーリエ変換によって$G(\rho, \theta)$を得た後，ρ, θ $(0\leq\theta<\pi)$の関係から$G(\rho, \theta)$を角度別に放射状に配置しなおし，$F(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$を作成する．$F(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)=F(u, v)$の2次元フーリエ逆変換を次式で行い原画像を得る（**図1-3**）．

$$f(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(u,v)e^{i2\pi(ux+vy)}dudv \tag{1-4}$$

しかし，実際には投影をθについて連続的に取得することができず，$G(\rho, \theta)$を極座標から直交座標に再配置する際，高周波数成分ほどデータが粗になってしまう．粗になった部分は補間によって埋め合わせる．

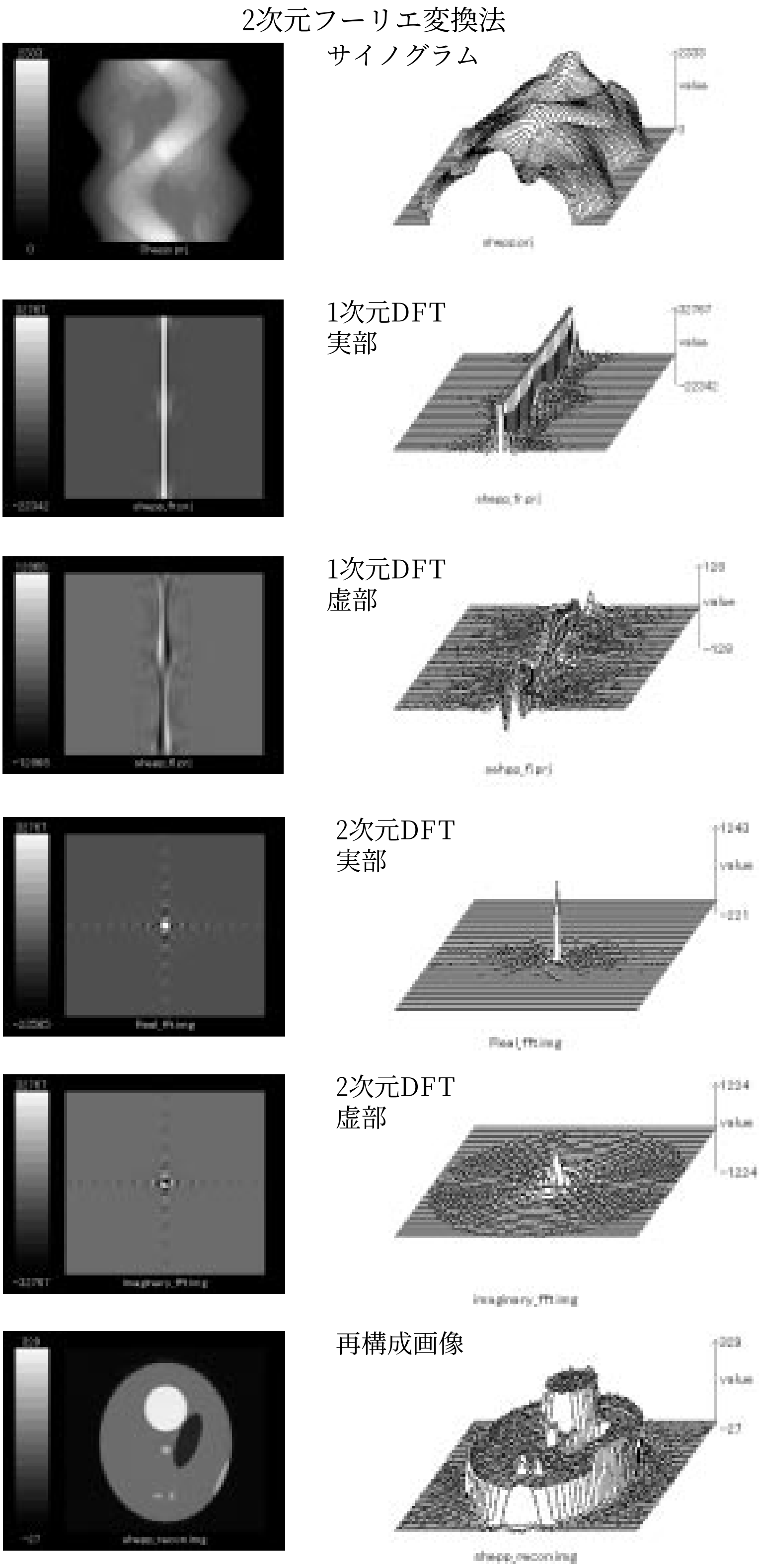

図1-3　2次元フーリエ変換法による画像再構成

Sheppファントムの場合を示す.

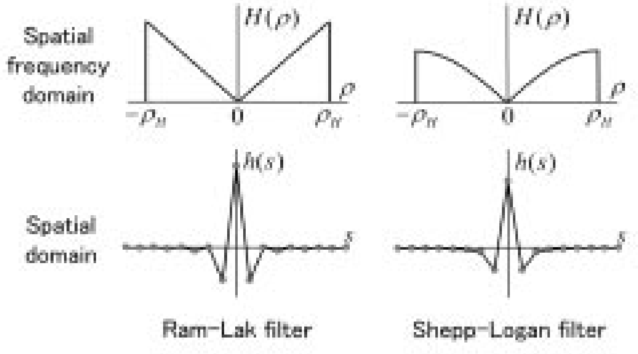

図1-4　画像再構成フィルタ

Ram-Lakフィルタは分解能に優れるが雑音を増強する．一方，
Shepp-LoganフィルタはRam-Lakフィルタに比較し雑音を抑制する．

(4) フィルタ補正逆投影法

極座標で得た投影を直交座標に並べる際の誤差をなくすため，(1-4) 式を$u=\rho\cos\theta$，$v=\rho\sin\theta$とした極座標系に書き換えると，

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(u,v)\,e^{i2\pi(ux+vy)}\,du\,dv \\
&= \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\infty} F(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\,e^{i2\pi\rho(x\cos\theta+y\sin\theta)} \underbrace{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial\rho} & \dfrac{\partial u}{\partial\theta} \\ \dfrac{\partial v}{\partial\rho} & \dfrac{\partial v}{\partial\theta} \end{vmatrix}}_{\rho\cos^2\theta+\rho\sin^2\theta=\rho} d\rho\, d\theta \\
&= \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\infty} F(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\,e^{i2\pi\rho(x\cos\theta+y\sin\theta)}\,\rho\, d\rho\, d\theta \\
&= \int_{0}^{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\,|\rho|\,e^{i2\pi\rho(x\cos\theta+y\sin\theta)}\,d\rho\, d\theta \\
&= \int_{0}^{\pi}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} G(\rho,\theta)\,|\rho|\,e^{i2\pi\rho s}\,d\rho\right\}d\theta \qquad (1\text{-}5)
\end{aligned}
$$

となる．なお，(1-5) 式の4行の絶対値は$F(\rho,\ \theta+\pi)=F(-\rho,\ \theta)$から3行と等号にするために付けたものである．また，5行の変換は投影切断面定理を使用している．

(1-5) 式は投影を1次元フーリエ変換し，**図1-4**上段左のように空間周波数の絶対値で示される高周波数強調フィルタのランプ (ramp) フィルタ$|\rho|$を掛けた後，1次元フーリエ逆変換を行い実空間に戻す．フィルタ補正した投影をθ ($0\leq\theta<\pi$) について積分し，原画像$f(x,\ y)$を得る．

θ ($0\leq\theta<\pi$) についての積分は，$s=x\cos\theta+y\sin\theta$で示される$f(x,\ y)$すべてに1次元フーリエ逆変換後の投影の値を加算する操作を行っている．投影線に沿って原画像$f(x,\ y)$の線積分を行うことを（順）投影 (forward projection：FP) というのに対し，ここで行っている投影線上に投影の値を書き込む操作を逆投影 (back projection：BP) という．以上の方法をフィルタ補正逆投影 (filtered back projection：FBP) 法という．FBP法は2次元フーリエ変換法と数学的に等価である．

(5) 重畳積分法

FBP法では周波数空間で投影とフィルタ関数の間で掛け算を行ったが，これを実空間での重畳積分に置き換えたものを重畳積分法という．実空間で演算を行うためにはランプフィルタ｜ρ｜のフーリエ逆変換（インパルス応答）$h(s)$ が必要となる．

$$h(s)=\int_{-\infty}^{\infty}|\rho|e^{i2\pi\rho s}d\rho \tag{1-6}$$

(1-5) 式は (1-6) 式を用いると

$$\begin{aligned} f(x,y)&=\int_0^{\pi}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}g(s,\theta)h(x\cos\theta+y\sin\theta-s)ds\right\}d\theta \\ &=\int_0^{\pi}g(s,\theta)\otimes h(s)\,d\theta \end{aligned} \tag{1-7}$$

ここで⊗は重畳積分（畳み込み）を表す．

(1-7) 式を解くには，周波数が無限大のときに｜ρ｜が0に収束するよう設定する必要がある．ここで論じているデータは離散データであることから，ナイキスト周波数よりも高い周波数のデータは存在し得ない．よって，この周波数よりも高い部分については0と置くことができる．このようなフィルタをRamachandran-Lakshminarayanan（Ram-Lak）フィルタという．ナイキスト周波数を ρ_H とし，サンプリング幅を Δs（$\rho_H=1/2\Delta s$）とすると，(1-6) 式は

$$\begin{aligned} h(s)&=\int_{-\rho_H}^{\rho_H}|\rho|e^{i2\pi\rho s}d\rho \\ &=2\int_0^{\rho_H}\rho\cos(2\pi\rho s)\,d\rho \\ &=2\rho_H^2\frac{\sin(2\pi\rho_H s)}{2\pi\rho_H s}-\rho_H^2\left\{\frac{\sin(2\pi\rho_H s)}{\pi\rho_H s}\right\}^2 \\ &=\frac{1}{2\Delta s^2}\frac{\sin(2\pi s/2\Delta s)}{2\pi s/2\Delta s}-\frac{1}{4\Delta s^2}\left\{\frac{\sin(\pi s/2\Delta s)}{\pi s/2\Delta s}\right\}^2 \end{aligned} \tag{1-8}$$

となる．さらに，離散データを扱っていることから，$s=n\Delta s\,(n=0,1,2,\ldots)$ が成り立つ．このことを利用すると (1-8) 式は

$$h(n\Delta s)=\begin{cases}\dfrac{1}{4\Delta s^2} & n=0\\ 0 & n=2m\ \ (m=0,1,2,\cdots)\\ -\dfrac{1}{n^2\pi^2\Delta s^2} & n=2m+1\ \ (m=0,1,2,\cdots)\end{cases} \tag{1-9}$$

で表される．Ram-Lakフィルタはナイキスト周波数で急激に遮断されるため，画像のエッジ部でアーチファクト（虚像）を生ずることが指摘されている．この影響を抑制する目的で改良されたものとしてShepp-Loganフィルタがあり，周波数空間において

$$H(\rho)=\begin{cases}\dfrac{2\rho_H}{\pi}\left|\sin\left(\dfrac{\pi\rho}{2\rho_H}\right)\right| & |\rho|\le\rho_H\\ 0 & |\rho|>\rho_H\end{cases} \tag{1-10}$$

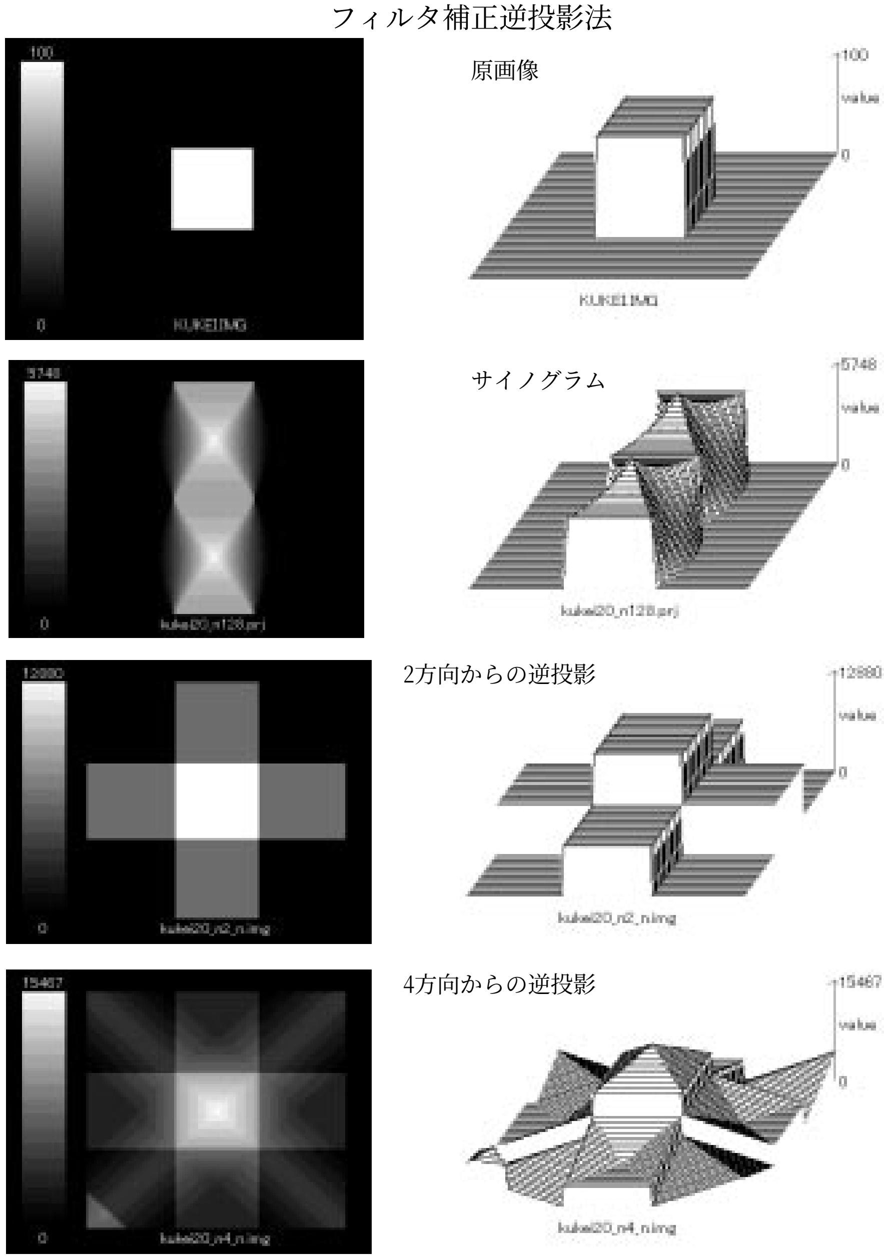

図1-5a1　フィルタ補正をしない場合の逆投影画像

で表される．(1-10）式のフーリエ逆変換は

$$h(n\Delta s)=\frac{2}{\pi^2\Delta s^2(1-4n^2)} \tag{1-11}$$

となる．Ram-Lak フィルタと Shepp-Logan フィルタを**図1-4**に示す．**図1-5a**にフィルタ補正をしない場合のサイノグラムと逆投影画像，**図1-5b**にフィルタ補正後のサイノグラムと逆投影画像を示す．