

図5-3 X線の計測

左側は線減弱係数が一様の μ の場合で、右側は線減弱係数が不均一で $f(x, y)$ の分布を持っている場合。

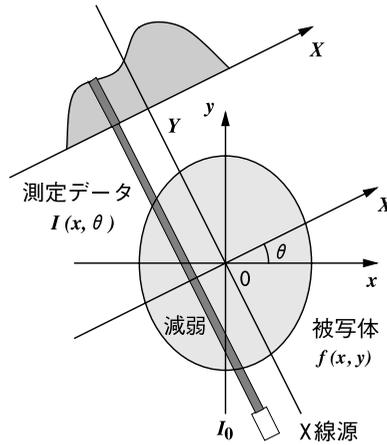


図5-4 X線CTの座標系

$$I = I_0 \cdot \exp\left[-\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dl\right] \tag{5-10}$$

となる。これがX線計測の一般式である。

〔第2節〕 X線CTの投影データ

X線CTでの測定データは、X線管球から放射され、被写体を透過して減弱を受けたX線を検出器で測定し、その強度として与えられる。まず、図5-4のような座標系を定義する。被写体に対して固定した直交座標系を x - O - y とし、この座標 (x, y) において被写体の線減弱係数の分布を $f(x, y)$ とする。次にこの座標系 x - O - y に対して、原点を中心に角度 θ だけ回転した新たな直交座標系を X - O - Y と定義する。両座標系間の関係は、

$$\begin{pmatrix} x = X \cos \theta - Y \sin \theta \\ y = X \sin \theta + Y \cos \theta \end{pmatrix} \tag{5-11}$$

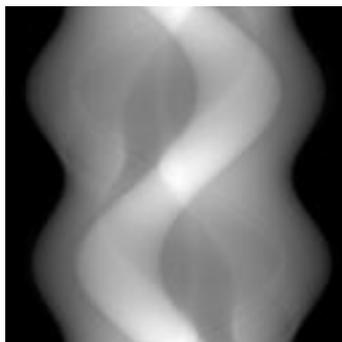


図5-5 Shepp ファントムから作成した投影データ

となる。

ここで、Y軸に平行に強度 I_0 のX線ビームを照射すると、被写体を透過した後のX線強度 $I(X, \theta)$ は、

$$I(X, \theta) = I_0 \exp\left[-\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dY\right] \quad (5-12)$$

となる(測定データ)。これから、X線強度の減弱率の対数変換 $g(X, \theta)$ は、

$$\begin{aligned} g(X, \theta) &= \ln\left[\frac{I_0}{I(X, \theta)}\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dY \end{aligned} \quad (5-13)$$

により表される。これをX線CTにおける投影データと呼び、またこの $f(x, y)$ より $g(X, \theta)$ を求める変換をRadon変換と呼ぶ。このようにして得られる投影データを、被写体をめぐる全角度 $0 \leq \theta < 2\pi$ に対して与え、これより被写体の線減弱係数の分布 $f(x, y)$ を求めることがX線CTの画像再構成の問題となる。

楕円の組み合わせで作成した画像の投影データを作成するプログラムをプログラム5-1に示す。このプログラムでは、実行時に楕円のパラメータを入力したファイル名、作成したプロジェクションのファイル名、プロジェクションの動径方向の数と角度方向の数とピクセル実長を入力できるようになっている。図3-17に示した、Sheppファントムのパラメータ用のファイル3-9を使用する。この楕円のパラメータファイルを用いて作成した投影データのサイノグラムを図5-5に示す。サイノグラムは、横方向が検出器の並びの方向で、縦方向が検出器を回した角度の方向になっている。

〔第3節〕 2次元フーリエ変換法

前節で示した投影データ $g(X, \theta)$ の集合から、最も簡潔に被写体の線減弱係数の分布 $f(x, y)$ を求める解析的アルゴリズムを説明する。その前に、画像再構成問題の内容を数学的に明瞭にする。

2次元の再構成問題として、実空間 (x, y) に対応する周波数空間の角周波数の座標を (u, v) で表し、被写体の線減弱係数の分布 $f(x, y)$ の2次元フーリエ変換を $F(u, v)$ とすると、その定義式より、

$$F(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i(\xi x + \eta y)} dx dy \tag{5-14}$$

と表される。直交座標系で表されている (,) を極座標系 (,) に変換すると、

$$\begin{cases} \xi = \omega \cos \theta \\ \eta = \omega \sin \theta \end{cases} \tag{5-15}$$

となる。は角周波数である。この (5-15) 式を (5-14) 式に代入すると、

$$F(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} dx dy \tag{5-16}$$

となる。ここで、

$$X = x \cos \theta + y \sin \theta \tag{5-17}$$

と、積分を $dx dy = dX dY$ と表せることより、

$$\begin{aligned} F(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i\omega X} dX dY \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dY \right] e^{-i\omega X} dX \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(X, \theta) e^{-i\omega X} dX \end{aligned} \tag{5-18}$$

と書くことができる。(5-18) 式を見てわかるように、角度 θ の方向に撮られた投影データ $g(X, \theta)$ を変数 X について1次元フーリエ変換すれば、求めたい線減弱係数の分布 $f(x, y)$ の2次元フーリエ変換の極座標表示における角度 θ 方向成分が得られる。よって投影データ $g(X, \theta)$ を $0 \leq \theta < \pi$ に対して得ることにより、 $f(x, y)$ のフーリエ変換 $F(\xi, \eta)$ は完全に定まることになる。

したがって、被写体の線減弱係数の分布 $f(x, y)$ は、 $F(\xi, \eta)$ の2次元フーリエ逆変換である

$$f(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi, \eta) e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta \tag{5-19}$$

により求められる。以上の関係を図5-6に示す。この関係は、投影切断面定理としてよく知られている。この関係を直接実行する方法は2次元フーリエ変換法と呼ばれる。

この方法では、具体的な計算は1次元および2次元のフーリエ変換に関するもののみであり、いずれもFFTを利用して、きわめて迅速に実行される。しかしながら、具体的な計算機によるデジタル計算を考えると、(5-18) 式の $F(\omega \sin \theta, \omega \cos \theta)$ を表す極座標表現による格子点 (ξ_i, η_j) と (5-19) 式の $F(\xi, \eta)$ を表す直交座標表現による格子点 (ξ_m, η_n) の位置は一般には異なるため、適当な内挿計算が必要となる。この際、計算精度が十分に得られなければ、誤差に基づくアーチファクト (偽像) が発生する。

FFTのプログラムを利用して2次元フーリエ変換法で再構成するプログラムを、プログラム5-2に示す。プログラム5-2では、FFTのプログラム4-15を用いる。プログラム5-2を用いて、Sheppファントムの投影データから再構成した画像を図5-7に示す。

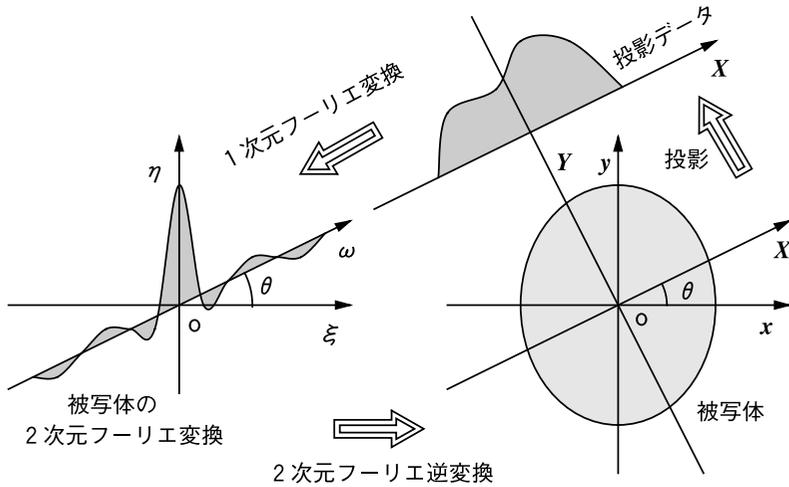


図5-6 X線CTにおける解析解（投影切断面定理）

投影データの1次元フーリエ変換は、被写体の2次元フーリエ変換における原点を通る同じ角度の1次元データと一致する。

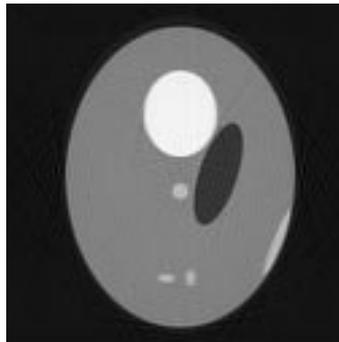


図5-7 2次元フーリエ変換法で再構成したSheppファントムの画像

〔第4節〕 フィルタ補正逆投影法

このフィルタ補正逆投影法 (filtered back-projection法: FBP法) は、前節で述べた2次元フーリエ変換法と数学的に等価な解析的方法である。ここでは、内挿計算による誤差を避けるために、(5-19)式を直交座標表現ではなく、極座標表現で行う。(5-15)式を用いて(5-19)式を動径方向、角度方向の極座標系で表すと、積分は $d d = d d$ となるので、

$$f(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty F(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta) e^{i\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} \omega d\omega d\theta \quad (5-20)$$

となる。の積を | | とすることにより、の範囲をマイナス領域に拡張することができる。すると(5-20)式は、

$$f(x, y) = \frac{1}{2(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \left[\int_{-\infty}^\infty F(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta) e^{i\omega X} |\omega| d\omega \right] d\theta \quad (5-21)$$

と書き表すことができる。ここで、 $X = x \cos \theta + y \sin \theta$ を利用している。(5-21)式の [] 内の積分を $q(X, \theta)$ として、

$$\begin{aligned} q(X, \theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty F(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta) e^{i\omega X} |\omega| d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty g(X, \theta) e^{-i\omega X} dX \right] |\omega| e^{i\omega X} d\omega \end{aligned} \quad (5-22)$$

と考えると、この式は、角度方向の投影データ $g(X, \theta)$ の X に対する1次元フーリエ変換 $F(\cos \theta, \sin \theta)$ に対して、周波数領域で | | によって表されるフィルタを掛け算し、フーリエ逆変換することを意味している。これがFBPの「F (filtered: フィルタ補正)」の部分に相当する。この $q(X, \theta)$ を用いて残りの式を表すと、

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} q(X, \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} q(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) d\theta \end{aligned} \quad (5-23)$$

となる。これがFBPの「BP (back-projection: 逆投影)」の部分に相当する。

この方法では、図5-8に示すように角度方向の投影データ $g(X, \theta)$ に対して(5-22)式で示したフィルタリングで修正した新しい投影データ $q(X, \theta)$ をつくった後、これを逆投影して $f(x, y)$ を求めることになる。このため、この方法をフィルタ補正逆投影法と呼んでいる。ここで逆投影とは、空白の画面上に投影データを投影の方向へ逆に戻し、これを各方向の投影データについて重ね合わせて画像を得る方法のことである。

このようなフィルタ補正逆投影法は、現在のCTで最も一般的に用いられている再構成法である。投影データに対するフィルタリング(1次元)は、一般のデータ処理の手法としてすでに常識になっているように、FFTを利用して周波数空間で行うのが非常に迅速に処理できて有利である。このため、周波数空間でフィルタリングを行うフィルタ補正逆投影法が、医学診断用CTの商用機で最も普通に用いられている。

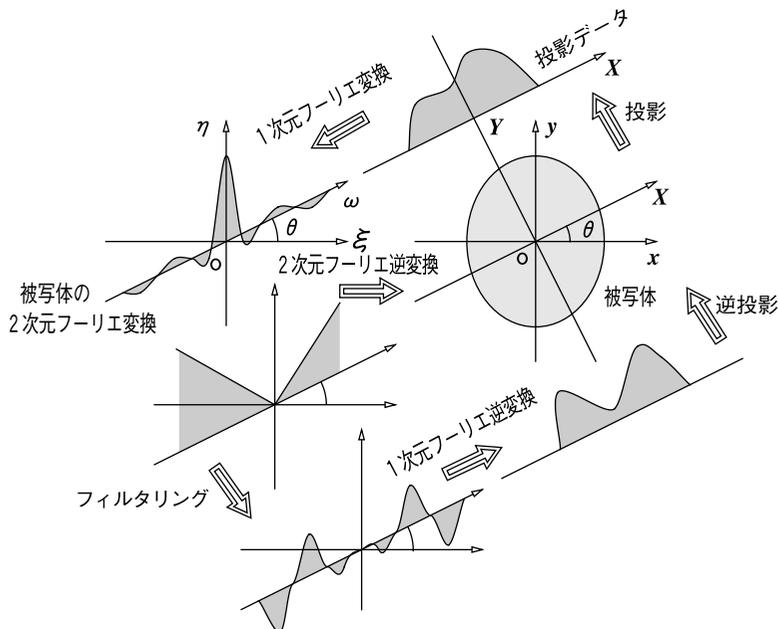


図5-8 FBP (filtered back-projection) 法

投影データの1次元フーリエ変換に対して $|\cdot|$ のフィルタを掛け、それを1次元フーリエ逆変換する。そのデータを逆投影という操作によって実空間に戻す。この操作をすべての角度の投影データで行うと被写体分布が求まる。

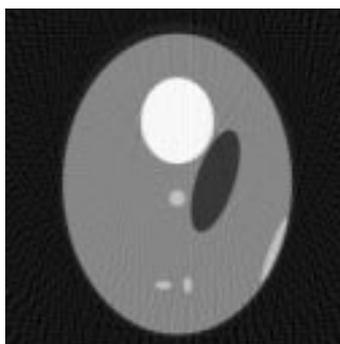


図5-9 FBP法で再構成した Shepp ファントムの画像

このFBP法のなかで使用する逆投影のプログラムをプログラム5-3に示す。この逆投影のプログラムとプログラム4-15のFFTのプログラムを用いて、FBP法を実行するプログラムをプログラム5-4に示す。このプログラム5-4を用いて、Sheppファントムの投影データから再構成した画像を図5-9に示す。また、FBP法による画像再構成の過程を図5-10に示す。投影データは、角度 θ の方向を縦に並べたサイノグラム形で表示している。

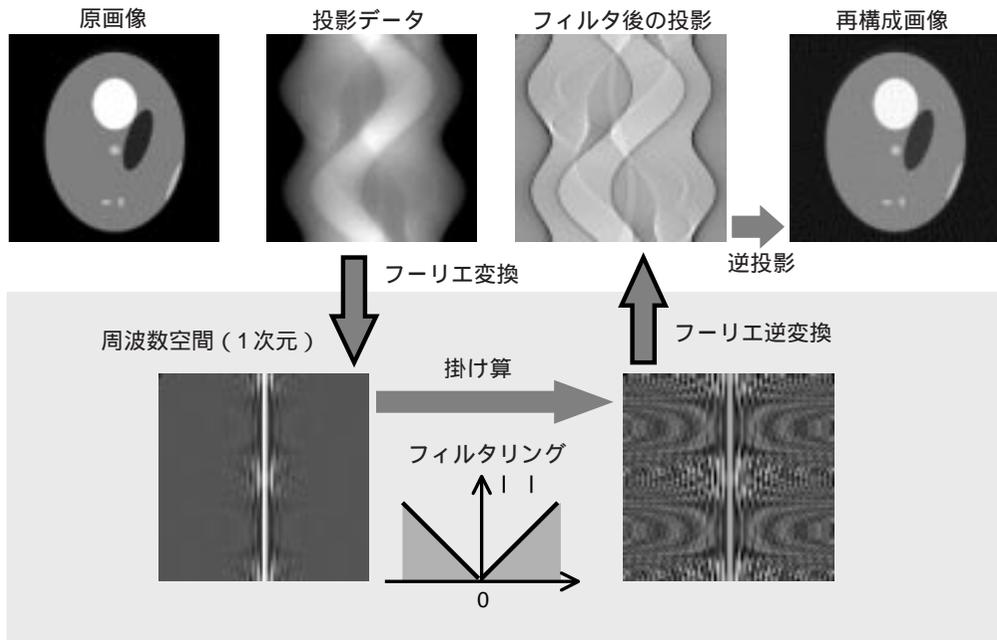


図5-10 FBP法による画像再構成の過程

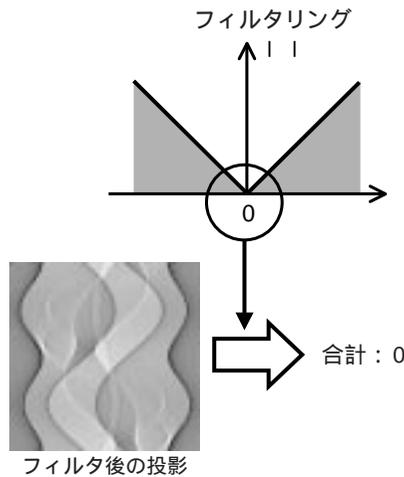


図5-11 FBPのフィルタリング
フィルタ後の投影はその合計値がゼロになる。

〔第5節〕 ゼロパディング

FBP法は、投影データの段階で1次元フーリエ変換し、そこに | | の高域通過フィルタを掛け合わせ、フーリエ逆変換する。その後逆投影を行っている。図5-11に示すように | | の高域通過フィルタは、原点がゼロになるのでそれを掛け合わせてフーリエ逆変換したフィルタ後の投影データは、その合計値がゼロになる。周波数空間でのゼロ周波数（原点）の値は、実空間の合計値に相当する。そ